DOI:10.16661/j.cnki.1672-3791.2008.28.137

论高等数学教育和初等数学教育的互动

王苹　吴海燕
（青岛科技大学数理学院　山东青岛　266043）

摘　要：本文通过对高等数学教育和初等数学教育现状分析研究，阐述了加强两者互动的必要性，并给出实施两者互动的几点建议。

关键词：高等数学教育　初等数学教育　指导性　基础性
中图分类号：G642　　文献标识码：A　　文章编号：1672-3791(2008)10(a)-0195-02

随着科学与计算机技术的快速发展，数学的作用日见凸现。正如数学家华罗庚所说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，地球之变，生物之迷，日用之繁”无一能离开数学。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算等等，这些能力将使人终身受益。正因如此，从中学到大学数学课一直是非常重要的基础课，现在绝大多数高等院校都将《高等数学》列为非数学专业学生的必修课。然而从初等到高等数学，研究对象和研究方法都发生了转变：由研究常量和固定不变的图形的性质到变量与变量的依赖关系，由研究具体问题到研究抽象问题，从用静止观点到用变化的观点研究问题，而这种变化也带来了一些问题。

对大学新生来说：要从简单、基础的数学思维转到对高度抽象、复杂的高等数学的学习中确实有一定的难度，特别是教材的顺序从抽象、难掌握的极限概念讲起大多数学生感到这种定义很难理解，像在云里雾里一般。同时学生们还感觉高等数学和初等数学没有必然的联系，以前的知识用不上，感到很迷惑。对于从师范毕业从事中学数学教学的老师们来说[1]：普遍感觉在大学学的高等数学知识对教学没有什么用，使他们感到没用用武之地。如何帮助他们摆脱这种被动的状态呢？本文提出通过加强初等数学教育和高等数学教育的互动来解决问题，具体分析如下。

1 利用高观点分析研究初等数学

早在19世纪末20世纪初F·克莱茵在其著作《高观点下的初等数学》就提出：“加强函数和微积分的教学，并借此充实代数内容”；同时强调“把解析几何纳入中学数学教学内容，并用几何变换的观点改造传统的几何内容”。我国也越来越重视这种改革，现阶段教育部已明确规定在初等数学（义务教育阶段和高中阶段）中明显地加大经典高等数学和现代数学的知识含量，而且主要以系列、模块和专题的形式呈现，同时渗透了数学模型思想、算法思想等。利用高观点研究初等数学应有以下几方面。

运用数学思想和方法在高等数学与初等数学之间架起桥梁，真正发挥高等数学对初等数学的指导作用[2]：用高等数学的思想方法去总结初等数学的解题规律，用高等数学的理论对初等数学作更深推广和发展，用高等数学的知识去统一初等数学的松散体系；并适当增加与初等数学密切联系的现代数学内容，总之是用较高观点研究分析初等数学，从而使中学数学教材教法得到居高临下、深入浅出地理解和处理。因为仅只局限于用初等数学的眼光来看初等数学问题，很多问题是无法看清的。正如德国著名数学家克莱因曾经告诫我们的一样，只有在完全不是初等数学的理论体系中，才能深刻地理解初等数学，比如对数的存在性唯一性、数学归纳法的可靠性、多项式因式分解概念等，仅用初等数学眼光来看都是模糊的，这是初等数学的局限性。因此对于师范毕业从事中学数学教学的老师来说，有必要阐明高等数学与初等数学之间的联系，突出高等数学对初等数学的指导作用，掌握用高等数学的思想、方法从不同的角度去研究初等数学问题。这些问题可以是与中学教学内容密切相关但又未能完全解决，而应用所学高等数学知识可以解决的理论、方法问题，也可以是初等数学中已经解决，而运用高等数学的知识，从另一更高的角度重新认识初等数学中重要的概念、理论实质及其背景，还可以借助于高等数学的方法来统一处理和解决初等数学中一些问题（尽管这些问题可以用初等的方法来解决）等。如在研究几何问题时，我们可以适当地选取坐标系，也就是说平面上几何问题的代数式，与其坐标选择无关问题。从变换群的观点来看，坐标系的平移和旋转变换与点的平移和旋转变换，只不过是同一个代数变换式的不同的几何解释而已。由此可以得出凡是用来表示图形的几何量和几何关系的代数表达式，它们的值在坐标变换下都是不变的，它们都是坐标变换下的不变量。还可以通过观察微分方程与代数方程都是方程的特性，从基本概念、解的存在性与个数，求解方法及增、失根等方面进行比较它们的内在联系，以加深对代数方程的特性了解。同样也可以用微分方程的几何性质来研究二次曲线，深刻揭示二次曲线的性质、实际背景和现实意义等。在数学分析中，也可用导数的工具，来讨论函数的性质以及图像。

对中学数学教材中那些讲得模糊、薄弱的内容，找寻它们在高等数学里的背景，甚至追溯其在数学史上产生和发展的过程，加以分析、充实、提高，帮助教师更好地把握教材。如什么是曲线的切线。在中学教材中是这样规定的：与曲线只有一个交点的直线就是切线。这种描述是不准确的，切线应该是曲线的割线的极限位置。

2 加强初等数学对高等数学基础作用

16世纪以来由于工业革命的发展，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题，这些问题和以往的数学问题有着本质上的区别。要解决它们初等数学以不够用了，需要创立全新的概念与方法，由此创立出研究现象中各个量之间的变化的新数学，变量与函数的新概念应时而生，比如导数、微积分等等，导致了初等数学阶段向高等数学阶段的过渡。可以看出，初等数学和高等数学的研究对象和研究方法发生了基础性的转变[3]，正是这种转变使刚刚接触高等数学的大学新生产生了不适应。鉴于此，我认为应从几方面改善。

首先中学数学教育应实现三个转变：从具体数学到概念化抽象数学的转变，发展符号意识；从常量数学到变量数学的转变；从直观描述到严格推理证明的转变，建立严密的逻辑思维方法。还要向学生提供数学解决问题的思想方法，并加强这方面的训练，为学习高等数学做好准备。下面举一个具体例子来说明问题：

求极限问题：中学生进行二次根式运算时，通常对二次根式进行分母有理化简化计算。如

$$\frac{1}{x-\sqrt{2+x^2}}=\frac{(x+\sqrt{2+x^2})}{(x-\sqrt{2+x^2})(x+\sqrt{2-x^2})}=-\frac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2})$$

故在中学运算二次根式，一般都要求化成最简二次根式来简化计算。但就此给学生思维定势：凡是碰到二次根式均要进行分母有理化，而绝对没有想在高等数学中，常常需要把最简二次根式进行分子有理化的转变。

例：求极限 $\lim\limits_{n->\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$

其原因是：$\lim\limits_{n->\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\infty-\infty=0$

①把无穷大认为是一个数，因而相减；②学生不习惯于分子有理化的方法。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

正确地解法应是对表达式进行分子有理化：

我们对二次根式进行分子有理化或对分母进行有理化，这里似乎与中学的二次根式分母

$\lim\limits_{n->\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim\limits_{x->\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$ 有理化相反。但事实上，二者的作用却是相同的。分母有理化的主要目的是为了将结果化为最简二次根式，而在高等数学中，使用二次(或高次)根式将分子有理化或分子及分母有理化，也是为了求极限或进行某种结果的简化。因而做好初等数学与高等数学内容的衔接，加强中学数学教育的三个转变，对学生学好高等数学是至关重要的。

其次，教师应做好学生转型期的教学工作[4]。从初等到高等数学，研究对象发生了转变，由研究常量和固定不变的图形的性质到变量与变量的依赖关系，例如新生从未接触变化过程，教材的顺序从抽象、难掌握的极限概念定义讲起，大多数学生感到这种定义很难理解，一般学生只会“比葫芦画瓢”机械模仿教师的讲解步骤做习题。而“极限”又是高等数学最基础的概念，它贯穿这门课程的始终因而非常重要。而且它所表现的思想和方法是整个高数的精髓，也是高数教育的重点。所以老师在从初等数学到高等数学转型的教学中要做注意实现从初等数学到高等数学在知识上的衔接，为了使数列极限的概念易于理解，可以先从直观的描述讲起较易理解。

从以上分析可以看出，只有有效地加强高等数学教育和初等数学教育的互动，才能使学生更好地掌握数学的思想方法和解决问题的能力。

参考文献

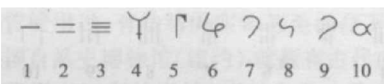
[1] 张劲松.从“高观点下的初等数学”看中学数学教师的角色[J].数学教学研究，2007，4:4～7.

[2] 黄云鹏.数学史、数学教育与数学发展的互动[J].西北大学学报(自然科学版)，2007(1):170～172.

[3] 裘晓岚.关于高观点下初等数学教育的探讨[J].福建师范大学学报(自然科学版)，1999，15(3).

[4] 贺金波，鲁洁.从初等数学到高等数学转型期的教学[J].赤峰学院学报(自然科学版)，2007，8(4):11～12.

(上接194页)



创造出现在国际通用的印度—阿拉伯数码，是各民族的祖先一代接一代艰辛探索和创造的结果。公元前3世纪，印度最早有一种婆罗米数字，到8世纪后叶，有一个印度天文学家访问巴格达王宫时，把这种印度式的数字写法介绍给了阿拉伯人，后来又传到欧洲，并在欧洲大地上迅速传递、改进。最后，历经几百年，一步一步地逼近现代形式。到1522年，在英国托恩斯妥所写的书中，数字才和现在写法基本一致，并逐渐固定下来：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

地球村上的居民为了小小的一套数字，花费了四千多年的精力，不断改进。到16世纪，终于形成了当今世界各国不用翻译，人人都能认得的国际通用的印度—阿拉伯数码了。印度—阿拉伯数码用较少的符号，最方便得表示一切数和运算，给数学的发展带来很大的方便，是一项卓越伟大的贡献。

3.2 数字记趣

一些国家和民族对某些数字有特殊的情感，表现出不同的好恶，反映出不同民族的习俗和文化背景。

中国古人认为，万物均由天地阴阳交感而成，形成了道生一，一生二，二生三，三生天地，天地生阴阳，阴阳生万物的数学关系观。“一”的意义成了“从无到有”，而在3000年前的巴比伦数学中，“1”是一个不祥的数字，1万称为“黑暗”，1万万则是“黑暗的黑暗”。

中国古人还认为，“三”是一个成功的数字。史记云：“数始于一，终于十，成于三”，《老子》则说：“道生一，一生二，二生三、三生万物。”

玛雅人认为他们的祖先是七个山沟里的七个神仙。西藏人一向认为人类的启蒙者来自天上的七颗行星上的七位国王。基督教认为，天堂分为七层等等。

3.3 记数中的美

国际通用的印度—阿拉伯数码最多只有两笔画的1，2，3，…符号，简洁优美，人们对其的心情，犹如母亲面对新生的婴儿，充满了温柔、怜悯和爱。

3.4 记数与现代科技发展

记数的发展对人类科技、文化的发展起着重要的作用。

算筹记数促进了我国古代数学几项领先世界的成就，印度—阿拉伯数码传入欧洲，加快了欧洲数学的发展，许多数学家、天文学家对这套集体智慧的发现赞美不绝。如法国著名的数学家拉普拉斯写道：“用十个记号来表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度。这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩，简直无法估计它的奇妙程度。”

数字是宇宙间一种奇妙的东西，它的形成和发展，给人类带来了无比的希望和幸福。有人曾经设想，将来人类和银河系中其他天体上的“超级文明人”打交道时，也可能要用数码做“见面礼”。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(实验稿)[M].北京师范大学出版社，2003，6.

[2] 李迪.中国数学通史[M].江苏教育出版社，1997:19～48.

[3] 梁宗巨.数学历史典故[M].辽宁教育出版社，1992:18～23.

[4] 张景中.数学美拾趣[M].科学出版社，2004:201～203.

[5] 徐品方，张红.数学符号史[M].科学出版社，2006:19～20.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net