

概率论与高等代数的相互渗透

翟富菊 吴海燕
(青岛科技大学数理学院 山东青岛 266061)

摘要: 本文通过运用高等代数中的矩阵方法解决随机变量独立性的判定问题, 并且用随机变量的性质证明了高等代数中的两个重要不等式, 说明了高等代数、概率论在解决问题过程中的相互渗透, 揭示了它们之间的内在联系。

关键词: 随机变量 正交矩阵 数学期望

中图分类号: 0152.2:0211

文献标识码: A

文章编号: 1673-9795(2010)01(a)-0094-01

高等代数、概率论是数学的两大分支, 它们分别研究离散变量和随机变量, 但在解决问题时可以相互渗透, 相互交叉。本文通过运用高等代数中的矩阵方法解决随机变量独立性的判定问题, 并且恰当的构造随机变量的概率分布以及利用概率中的相关不等式证明了高等代数中的几个重要数列的不等式, 由此体现了数学的内在统一性。

1 矩阵方法在概率论中的应用

在概率论中, 判定随机变量的独立性通常是采用检验联合分布是否等于边际分布的乘积, 在正态分布的前提下也可用相关性和独立性的关系来判断, 但对于多维的随机变量此法计算比较复杂, 下面我们介绍一种比较简单的方法: 利用特殊矩阵的特殊性质来判断多维正态随机变量的独立性。

例: X_1, X_2, X_3, X_4 是相互独立、而且服从方差为 s^2 的正态分布的随机变量, 证明

$$f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{3}{4}X_1^2 + X_2^2 + \frac{1}{2}X_3^2 + \frac{3}{4}X_4^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_1X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3X_4 + \frac{1}{2}X_1X_4$$

与 $f_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sqrt{2}X_1 + 2X_3 - \sqrt{2}X_4$ 相互独立。

证: 记 $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T, Z = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)^T$, 其中 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 是 X_1, X_2, X_3, X_4 通过线性变换得到的随机变量,

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + \frac{1}{2}X_4 \\ Z_2 = -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 - \frac{1}{2}X_4 \\ Z_3 = -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{2}X_4 \\ Z_4 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 - \frac{1}{2}X_4 \end{cases}$$

则 $Z = AX$, 其中 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 易验证 $A^T A = E$,

所以矩阵A为正交矩阵。

$$\text{Var}Z = A \text{Var}X A^T = A s^2 E A^T = s^2 E,$$

即 $\text{cov}(Z_i, Z_j) = \begin{cases} s^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, 又因为 $Z_i (i=1, 2, 3, 4)$ 服从正态分布, 所以 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 相互独立。

$$\begin{aligned} f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) &= \frac{3}{4}X_1^2 + X_2^2 + \frac{1}{2}X_3^2 + \frac{3}{4}X_4^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_1X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3X_4 + \frac{1}{2}X_1X_4 \\ &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - \left[\frac{1}{4}X_1^2 + \frac{1}{2}X_3^2 + \frac{1}{4}X_4^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_1X_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_3X_4 - \frac{1}{2}X_1X_4 \right]; \\ &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 - \left(\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 - \frac{1}{2}X_4 \right)^2 \\ &= X^T X - Z_4^2 = X^T A^T A X - Z_4^2 = Z^T Z - Z_4^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \end{aligned}$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = \sqrt{2}X_1 + 2X_3 - \sqrt{2}X_4 = 2\sqrt{2}Z_4, \text{ 所以 } f_1(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ 与 } f_2(X_1, X_2, X_3, X_4) \text{ 相互独立。}$$

2 概率论方法在代数不等式证明中的应用

代数中的不等式证明是比较复杂的问题, 但我们如果应用概率论中随机变量的分布以及概率论中的不等式来证明, 有时可达到意想不到的效果。

定理1: (Holder不等式) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正的收敛数列, r, r' 为共轭实数 (即 $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{r'} \right)^{\frac{1}{r'}}$ 。

证: 构造随机变量 X , 使得其概率分布为:

$$P\{X = x_k\} = \frac{b_k^{r'}}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} = p_k, \quad (k=1, 2, \dots)$$

显然 X 的分布满足归一

性条件: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$ 。定义函数 $f(x_k) = \frac{a_k}{(b_k)^{\frac{1}{r-1}}}, k=1, 2, \dots$, 则,

$$\begin{aligned} Ef(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(b_k)^{\frac{1}{r-1}}} \frac{b_k^{r'}}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k b_k^{r'}}{(b_k)^{\frac{1}{r-1}}}, \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \end{aligned}$$

$$Ef(X)^r = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)^r p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^r}{(b_k)^{\frac{r}{r-1}}} \frac{b_k^{r'}}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^r b_k^{r'}}{(b_k)^{\frac{r}{r-1}}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^r$$

因为 $f(x) = x^r (r > 1)$ 为凸函数, 于是有 $[Ef(X)]^r \leq Ef^r(X)$,

$$\text{由此得 } \frac{\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right)^r}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{r'}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^r, \text{ 即}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right)^r \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^r \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{r'} \right)$$

参考文献

- [1] 张禾瑞, 郝炳新. 高等代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [2] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 余宏旺. 概率论思想方法在代数中的应用[J]. 安徽农业技术师范学院学报, 2001, 15(1): 54 ~ 56.
- [4] 李志, 孙逊. 线性代数方法在概率论问题中的渗透[J]. 科教文汇, 2008(6): 197.