

# 风险值和尾部条件期望的实证比较分析

王 苹 翟富菊

(青岛科技大学数理学院, 青岛 266042)

**摘 要** 由于风险值 VaR 具有一定局限性, 因此人们在 VaR 的基础上又提出了一种新的度量市场风险的方法: 尾部条件期望 TCE。利用 GED 分布和 T 分布的 TGARCH-M 模型建立计算公式, 并实证比较了 VaR 和 TCE 度量市场风险的准确性, 结果表明, 在通常情况下 TCE 和 VaR 均能较准确地度量市场风险。

**关键词** 风险值 尾部条件期望 TGARCH-M 模型 GED 分布 准确性

**中图法分类号** F832.5 F224.0; **文献标志码** A

随着经济全球化和金融一体化及近年来一系列金融灾难发生, 风险管理日益成为金融体系最核心的内容。目前风险值 (VaR) 已成为一种最常用的金融风险管理工具, 它是一种用统计的方法来衡量市场风险的测度。VaR 把对预期的未来损失的大小和该损失发生的可能性结合起来, 不仅风险管理者知道发生损失的规模, 而且也知道了损失发生的可能性。随着近几年来一些学者的深入研究, 在 VaR 的基础上又提出了一种新的度量市场风险方法——尾部条件期望 (TCE)<sup>[1]</sup>。利用 TGARCH-M 模型推导出计算公式, 并利用上证指数和公用指数的历史收盘数据比较了 VaR 和 TCE 度量风险的准确性。

## 1 模型介绍

### 1.1 TGARCH-M 模型定义

由于金融资产收益率具有变易率聚类性、分布的尖峰厚尾性和有偏性、杠杆作用, 同时又考虑到股票风险是决定其收益的重要因素, 所以为了准确地反应这些特性, 于 1987 年 Engle, Lilien 和 Robins 将 GARCH 模型中的条件方差引入均值方程, 即原

方程  $y_t = x_t' \theta + \epsilon_t$  变为  $y_t = x_t' \theta + \lambda \sigma_t^2 + \epsilon_t$ , 还可把方程中的条件方差改为

$$y_t = x_t' \theta + \lambda \lg(\sigma_t^2) + \epsilon_t \text{ 或 } y_t = x_t' \theta + \lambda \sigma_t + \epsilon_t^{[2]}$$

以此, 利用基于 GED 分布和 T 分布的 TGARCH-M 模型<sup>[3]</sup>。TGARCH-M 模型为:

$$\begin{cases} y_t = x_t' \theta + \lambda \lg(\sigma_t^2) + \epsilon_t, \epsilon_t = \sigma_t \nu_t, \nu_t \sim \text{GED}(0, \sigma_t^2, r) \\ \sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^r \gamma_k \epsilon_{t-k}^2 I_{t-k} \end{cases}$$

其中, 如果  $\epsilon_{t-k} < 0$ , 则  $I_{t-k} = 1$ , 否则  $I_{t-k} = 0$ 。如果  $y_t$  表示股票收益率,  $\alpha_i$  为表示利好消息的影响系数,  $\alpha_i + \gamma_i$  为表示利坏消息的影响系数。如果  $\gamma_i$  显著的不等于 0, 说明收益率存在杠杆效应, 因此用这种模型能较好地反应收益率序列的有偏问题。如果  $\lambda$  显著不为 0, 说明该模型反映了股票的风险是决定其价格和收益率的重要因素。

如果所有  $\gamma_i = 0$  模型就变为 GARCH 模型。

### 1.2 VaR 定义及计算

风险值 (VaR) 是指设随机变量表示投资一定数额的资产 W 后, 在未来某一持有期 T 内的损益率, 则满足

$$P\{Z_T(W) \leq -\text{VaR}\} = \alpha$$

VaR (通常取正值) 称为该投资组合在未来持有期 T 内置信度为  $1 - \alpha$  的风险值。

如果已知该投资组合在  $[0, T]$  时期内的损益率  $X = Z_T(W)$  的分布为  $F(x)$ , 则投资组合损益率分布

2009年6月23日收到

的  $\alpha$  分位数, 即  $x_\alpha = \sup\{x | P\{X \leq x\} \leq \alpha\}$ 。

对于 TGARCH M 模型, 有置信度为  $1-\alpha$  的风险值为

$$\text{VaR}(r_t) = -(\mu + \lambda \ln \sigma_t^2 + F_\alpha \sigma_t) \quad (1)$$

式(1)中  $F$  为随机变量  $r_t$  服从的分布。  $F_\alpha$  表示该分布的  $\alpha$  分位数。

### 1.3 TCE 定义及计算公式

由于 VaR 仅度量了资产组合在一定置信度下可能损失的分位数, 而忽略了越过这个分位数的损失达到何种程度, 同时 VaR 不具有次可加性, 次可加性反映了风险分摊原理, 即由几项子资产构成的投资组合承受的风险不大于各项子资产所承受的风险之和, 如一个金融机构的总风险不能由各子机构风险之和来预测, 将给风险度量带来很大的困难。因此一些学者在 VaR 的基础上又提出了一种新的度量市场风险方法——尾部条件期望 (TCE)<sup>[1]</sup>。

尾部条件期望 (Tail conditional expectation 简称 TCE) 设随机变量  $Z$  表示投资一定数额的资产  $W$  后, 在未来某一持有期  $T$  内的损益, 则

$$E_{TC}(Z) = -E\{Z | Z \leq -\text{VaR}\}。$$

称为该投资组合在持有期  $T$  内置信度为  $1-\alpha$  的尾部条件期望, TCE 表示越过 VaR 值的损失的均值。

对于 TGARCH M 模型, 有置信度为  $1-\alpha$  的 TCE 值为

$$E_{TC}(r_t) = -E\{r_t | r_t \leq x_\alpha\} = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{x_\alpha} r_t f(r_t) dr_t$$

其中  $f(r_t)$  为  $r_t$  的密度函数

当  $r_t \sim \text{GED}$  分布时, 公式为

$$E_{TC} = -\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}{2\alpha\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{x_\alpha} \frac{1}{\sigma_t} r_t \times \exp\left\{-\left|\frac{r_t - \mu_t - \lambda \lg(\sigma_t^2)}{\sigma_t}\right|\right\} \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}\right\} dr_t \quad (2)$$

式(2)中  $r_t$  为 GED 分布参数。

当  $r_t \sim t(n)$  时, 公式为

$$E_{TC} = -\frac{\Gamma\left(\frac{(n+1)}{2}\right)}{\alpha \sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \int_{-\infty}^{x_\alpha} \left[1 + \frac{(r_t - \mu_t - \lambda \lg \sigma_t^2)^2}{n \sigma_t^2}\right]^{-\frac{(n+1)}{2}} dx_t \quad (3)$$

式(3)中  $n$  为  $T$  分布的自由度。

## 2 实证研究

分别选取 2000 年 1 月至 2008 年 12 月上证指数和公用指数各 2171 个收盘数据作为样本。由于许多学者研究表明, 股票指数对数收益率序列具有变易率聚类性和 GARCH 效应以及具有尖峰厚尾右偏的特征, 所以本文建立非对称的 TGARCH M 模型来拟合上证和公用对数收益率序列, 同时在实证计算中得出随着模型中参数的增加, TGARCH M 模型的 AIC 值没有明显变化, 所以本文中建立 TGARCH (1, 1) M 模型对 VaR 和 TCE 进行实证分析。通过在 Eviews 6.0<sup>[4]</sup> 编制程序计算 VaR 值并在 Matlab 6.5<sup>[5]</sup> 中编制程序计算 TCE 值。

表 1 TGARCH (1, 1) M 模型参数估计结果

参 数	上证		公用	
	-T	-GED	-N	-GED
$\mu$	0.002 563	0.003 849	0.010 730	0.009 943
$\lambda$	0.000 258	0.000 393	0.001 209	0.001 101
$\omega/10^{-6}$	3.95	3.78	3.63	3.23
$\beta_1$	0.897 082	0.897 657	0.909 675	0.908 947
$a_1$	0.060 471	0.061 774	0.053 134	0.055 470
$\gamma_1$	0.066 194	0.057 062	0.055 848	0.051 539
T 分布自由度	5.028 065		4.999 060	
GED 参数 $r$		1.219 671		1.236 273
$\sigma_t^2$ 均值	0.000 311	0.000 303	0.000 351	0.000 344

表 2 置信水平为 95%和 99%的未来一天的 VaR值及实际超过 VaR的比例

TGARCH-M	-T		-GED	
	95%	99%	95%	99%
置信水平				
上证				
实际超过	0.035 013	0.058 723	0.028 009	0.045 168
VaR的比例	0.023 963	0.005 991	0.039 171	0.009 677
公用				
实际超过	0.036 641	0.061 934	0.029 403	0.047 506
VaR的比例	0.022 581	0.005 069	0.045 622	0.011 060

表 3 置信水平为 95%和 99%的未来一天的 TCE值及实际超过 TCE的均值

TGARCH-M	-T		-GED	
	95%	99%	95%	99%
置信水平				
上证				
实际超过	0.049 803	0.069 920	0.042 524	0.063 216
公用				
实际超过	0.053 042	0.081 895	0.043 052	0.066 208

表 1列举了上证指数和公用指数的分别基于 T 分布和 GED 分布的 TGARCH-M 模型的参数估计。结果表明  $\gamma_1$  显著的大于 0,说明收益率减小的波动大于增加的波动,表明存在杠杆效应,用该模型能较好地反应收益率序列的有偏问题;参数  $\lambda$  也显著不为 0,表明模型反映了股票的风险与其价格收益率的密切关系。参数估计结果表明用该模型拟合收益率是合适的。

利用式 (1)和式 (2)、式 (3),分别计算出在各种模型下的 VaR 值和 TCE 值,结果见表 2和表 3。在表 2中,利用返回检验验证得出基于 GED 分布的 TGARCH(1,1)-M 模型在各置信水平下都较好地估计了风险。相比之下,由于实际超过 VaR 的平均值远小于对应的置信度,表明基于 T 分布的该模型

估计过于保守。

由表 1知在各种模型下,上证指数的  $\sigma_1^2$  均值均小于公用指数的  $\sigma_1^2$  均值,表明公用行业投资风险稍大,又由表 2和表 3知,在各种置信度下,上证指数的 VaR 和 TCE 均对应地小于公用指数的 VaR 和 TCE,由此表明在通常情况下 TCE 和 VaR 均能较准确地度量风险。

### 3 结论

分别通过基于 T 分布的和 GED 分布的 TGARCH-M 模型建立 VaR 和 TCE 计算公式,并利用股票历史收盘数据进行实证分析,研究结果表明:尽管 VaR 存在一定的缺陷,但在通常情况下 TCE 和 VaR 均能较准确地度量市场风险,均是较好的度量市场风险的方法。所以建议在实际应用中,最好综合运用这两种方法度量市场风险。

### 参 考 文 献

- 1 Artzner P, Delbaen F, Eber JM, et al. Thinking coherently. Risk 1997; 10(11): 68-71
- 2 Engle R F, Lilien D M, Robins R P. Estimating time-varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. Econometrica 1987; 55: 391-407
- 3 张广玉,丁俊君. TARCH-M 模型在测度上海证券交易所风险中的应用.中南财经政法大学学报, 2004; (5): 113-116
- 4 于俊年. 计量经济学软件 EViews 的使用. 北京:对外经济贸易大学出版社, 2006
- 5 刘卫国. MATLAB 程序设计教程. 北京:北京水利水电出版社, 2005

## Comparative Analysis of Value-at-risk and Tail Conditional Expectation in Application

WANG Ping ZHAI Fu-ju

(School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, P. R. China)

[Abstract] Because of the disadvantage of the VaR model, a new measure is proposed: tail conditional expectation (TCE). VaR and TCE are compared in accuracy based on several formulae of TGARCH-M model with GED distribution and T distribution. The results indicate that TCE and VaR all can usually measure financial risk accurately.

[Key words] VaR, TCE, TGARCH-M model, GED distribution, accuracy