DOI:10.16351/j.1672-6987.2012.01.001

第33卷 第1期 2012年2月
青岛科技大学学报(自然科学版)
Journal of Qingdao University of Science and Technology(Natural Science Edition)
Vol.33 No.1 Feb.2012

文章编号:1672-6987(2012)01-0102-05

基于具有尾部变结构的Copula-GARCH模型的相关性分析

王 苹,陈瑞欣

(青岛科技大学 数理学院,山东 青岛 266061)

摘 要:针对金融市场中不同资产之间的尾部相关结构的非对称性和动态性,并通过分析几种常见的Copula函数在相关性分析上的优劣,本工作创新之处是构建了具有尾部变结构的Copula-GARCH模型。相比于单一的、静态的Copula函数,它具有多个Copula函数的混合特性。最后以上证综指和深证成指为例进行分析,结果表明:该模型能够更准确地描述投资组合中金融时间序列之间的动态相关特征。

关键词:具有尾部变结构的Copula函数;GARCH模型;χ^2检验;相关性

中图分类号:F 222.3　　文献标志码:A

Analysis of Dependence Based on the Copula-GARCH Model with Structural Change in Tail

WANG Ping,CHEN Rui-xin

(College of Mathematics and Physics,Qingdao University of Science and Technology,Qingdao 266061,China)

Abstract:Every Copula function has its advantage to analyze the dependence among the financial assets,so Copula-GARCH model with structural change in tail is established to describe non-symmetrical and dynamic tail dependence of different assets in financial market. Compared to other static Copula models,our model has mixing characteristics of several Copulas. Finally empirical study using the Shanghai Composite Index and the Shenzhen Component Index shows that the model can describe non-symmetrical and dynamic tail dependence of different assets in a portfolio better.

Key words:Copula-GARCH model with structural change in tail;GARCH model;χ^2 test;dependence

相关性分析是多变量金融研究领域的一个重要课题,也是投资组合的选择、资产定价及风险度量的关键。线性相关系数、Granger因果分析方法是常用的相关性分析方法,但它们都存在缺陷。如线性相关系数要求变量间的关系是线性的,而且其方差为有限。但是一般来说,金融资产收益分布均呈现尖峰厚尾特性,它们的方差有时并不存在,而且资产收益之间的相关关系通常是非线性的,因此用它来分析存在非线性的变量间的相关性,都可能对实证的结果产生很大的偏差,于是Copula理论被引入金融研究领域。应用Copula技术,可以将相关程度和相关模式的研究有机地

收稿日期:2011-07-14
基金项目:山东省自然科学基金项目(ZR2010AL018);山东省自然科学基金项目(ZR2010FL016).
作者简介:王 苹(1975—),女,讲师.

结合起来，能较好地描述随机变量之间非线性、非对称的动态尾部相关关系。Copula 函数是一种近年来新兴的金融分析工具。运用 Copula 理论可以将边缘分布与相关结构分开来研究，其中边缘分布的选择不受限制，可以选取各种边缘分布和 Copula 函数构造灵活的多元分布。另外若对变量作严格单调递增变换，相应的由 Copula 函数导出的一致性和相关性测度的值不变。因此运用 Copula 函数构建多变量金融模型时，模型估计较简单，经济含义较明了。考虑到金融市场本身是动态发展的，市场内部的变动或外部环境的变迁都会对它产生一定的影响，因此需要对金融市场之间的动态相关关系建模。动态 Copula 模型能描述变量之间这种相关关系。近年来，人们不断发展新的 Copula 模型来描述资产组合的相依结构[1-6]。从文献[6]提出的变结构的 Copula 模型中受到启发，本研究改进了模型并首次验证了当 $\varepsilon \leqslant 0.35$ 时具有尾部变结构的 Copula 模型能较准确地描述金融市场中不同资产之间的动态的尾部相关关系。

1　Copula 函数介绍

Copula 函数也称为连接函数或相依函数，它是把多维随机变量的联合分布函数与边缘分布函数连接起来的函数，其作用就是在多元分布中将相依性结构从边际特征中区别开来。这种思想来源于著名的 Sklar 定理：可将联合分布分解成多个边际分布和一个 Copula 函数，此函数能描述变量间的相关性。

定理 1（Sklar 定理）[7]：令 $F(\blacksquare,\cdots,\blacksquare)$ 为具有边缘分布 $F_1(\blacksquare), F_2(\blacksquare),\cdots,F_n(\blacksquare)$ 的联合分布函数，那么存在一个 Copula 函数 $C(\blacksquare,\cdots,\blacksquare)$，满足：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)),\tag{1}$$

若 $F_1(\blacksquare), F_2(\blacksquare),\cdots,F_n(\blacksquare)$ 连续，则 $C(\blacksquare,\cdots,\blacksquare)$ 唯一确定；反之，若 $F_1(\blacksquare), F_2(\blacksquare),\cdots,F_n(\blacksquare)$ 为一元分布，$C(\blacksquare,\cdots,\blacksquare)$ 为相应的 Copula 函数，那么由公式(1)定义的函数 $F(\blacksquare,\cdots,\blacksquare)$ 是边缘分布 $F_1(\blacksquare), F_2(\blacksquare),\cdots,F_n(\blacksquare)$ 的联合分布函数。

金融相关性分析中常用的 Copula 主要有 2 大类：椭球 Copula 类和阿基米德 Copula 类，这里仅介绍二元 Copula 函数。椭球 Copula 可以由椭球分布得到，常见的有 2 种：二元正态 Copula 函数和二元 t-Copula 函数[6]。

（1）二元正态 Copula 函数的分布函数[6]为

$$C(u,v;\rho)=\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\times \exp\left(\frac{-(r^2+s^2-2\rho rs)}{2(1-\rho)^2}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\tag{2}$$

其中 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 是标准一元正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 的逆函数，$\rho\in(-1,1)$ 为相关系数，它是 $\Phi^{-1}(\mu)$ 和 $\Phi^{-1}(v)$ 的线性相关系数。

（2）二元 t-Copula 函数的分布函数为

$$C(u,v;\rho,v)=\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{T_v^{-1}(v)}\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\times \left[1+\frac{s^2+t^2-2\rho st}{v(1-\rho)^2}\right]^{-\frac{v+2}{2}}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\tag{3}$$

其中 $\rho\in(-1,1)$ 为线性相关系数；$T_v^{-1}(\cdot)$ 为自由度为 v 的一元 t 分布函数 $T_v(\cdot)$ 的逆函数。

椭球 Copula 类具有对称性，只能捕捉到金融市场之间对称的相关关系。两者相比，t-Copula 函数具有更厚的尾部，对变量间尾部相关的变化更为敏感，能够更好地描述金融市场间的尾部相关。

椭球类 Copula 无法描述金融市场上的非对称性，而阿基米德类 Copula 中却有许多函数能解决这一问题，其中有 3 种常用的二元阿基米德 Copula 函数[6]。

（1）Gumbel Copula 函数的分布函数为

$$C_G(u,v;\alpha)=\exp(-[(-\ln u)^{\frac{1}{\alpha}}+(-\ln v)^{\frac{1}{\alpha}}]^{\alpha}),\tag{4}$$

其中 $\alpha\in(0,1)$ 为相关系数。当 $\alpha=1$ 时，随机变量 u,v 独立；当 $\alpha\to 0$ 时，随机变量 u,v 趋向于完全相关，其密度分布呈“J”字形，即上尾高下尾低，表明 Gumbel Copula 函数对上尾部的变化很敏感，能快速反映上尾的变化，而这种函数是下尾渐近独立的，故其对下尾的变化不敏感，难以反映下尾的相关变化。因此 Gumbel Copula 函数可用于描述具有上尾相关特性的金融市场之间的相关关系。

（2）Clayton Copula 函数的分布函数为

$$C_{Cl}(u,v;\theta)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta},\tag{5}$$

其中 $\theta\in(0,\infty)$ 为相关参数。当 $\theta\to 0$ 时，随机变量 u,v 趋于独立；到 $\theta\to\infty$ 时，随机变量 u,v 趋于完全相关，Clayton Copula 函数与 Gumbel Copula 函数正好相反，其密度分布呈“L”字形即上尾低下尾高，故其对下尾的变化十分敏感，但它对上尾的变化不敏感，难以捕捉到上尾的相关变化。

（3）Frank Copula 函数的分布函数为

$$C_F(u,v;\lambda)=\\-\frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{(e^{-\lambda u}-1)(e^{-\lambda v}-1)}{e^{-\lambda}-1}\right),\tag{6}$$

Frank Copula 函数密度分布呈"U"字形,具有对称性,因此无法捕捉随机变量间非对称的相关关系。因此 Frank Copula 函数只适合于描述具有对称相关结构的变量之间的相关关系。

2 具有尾部变结构的 *Copula* 函数的构建及参数的估计

运用 Copula 理论构建数学模型可分为 2 步,首先是确定边缘分布,其次是选择一个能描述边缘分布相依结构的 Copula 函数。具有尾部变结构的二元 Copula 模型就是将 GARCH 模型和具有尾部变结构的 Copula 函数结合在一起,用来分析金融时间序列间的相关关系和分布特性。其中 GARCH 模型用于估计边缘分布,由边缘分布模型对各金融时间序列进行概率积分变换,得到的新序列通过具有尾部变结构的 Copula 函数连接。本研究主要讨论二元具有尾部变结构的 Copula-GARCH 模型的构建。

2.1 确定边缘分布模型

金融资产收益率具有变易率聚类性、分布的尖峰厚尾性,基于 t 分布的 GARCH 模型能很好地地描述这些特性,因此应用 GARCH(1,1)-t 模型拟合样本数据来描述收益率序列的波动。GARCH(1,1)-t 模型[8] 为:

$$\begin{cases} r_{it}=\mu_t+\varepsilon_{it}, \\ \varepsilon_{it}=\sqrt{h_{it}}\zeta_{it}, \quad \zeta_{it}\overset{i.i.d}{\sim}t(v_i), \\ h_{it}=\omega_i+\alpha_i\varepsilon_{i,t-1}^2+\beta_i h_{i,t-1}, \end{cases}\tag{7}$$

其中 $i=1,2$;$t(v_i)$ 表示自由度为 v_i 的 t 分布;r_{it} 为收益率序列,α_i 为回报系数,β_i 为滞后系数。运用 Copula 模型描述金融收益率序列之间的相关关系通常简化为研究变量残差项之间的相关关系,使问题大大简化[9]。

2.2 构建具有尾部变结构的二元 Copula 模型

在金融市场中各资产之间的相关关系的变化是非常复杂的。金融市场内部的变动或者外部环境的改变都会对资产间的相关性产生影响。如金融危机的爆发、国家汇率制度的改革等重大事件都可能对市场产生冲击,因而相关性会随市场的波动而发生变化。在这种情况下,仅用一个简单的 Copula 函数很难全面地描述金融市场的相关模式。由此提出将几种具有不同优点的 Copula 函数进行线性组合,构建出一个具有变结构特性的 Copula 模型来描述金融市场中的动态相关关系,该模型能刻画样本处于不同样本区域如中部区域或尾部区域时变量间不同的相关结构。

由于 Gumbel Copula、Clayton Copula 和 t-Copula 在描述金融市场相关模式上有显著差异[6],可分别用于描述金融市场的上尾相关、下尾相关和上尾、下尾对称相关,因而结合这三种 Copula 函数,对服从(0,1)均匀分布的 $\{u\}_{t=1}^T$,$\{v\}_{t=1}^T$ 序列构建如下具有尾部变结构特性的二元 Copula 模型 C:

$$C=D^{lo}C_{Cl}(u,v)+D^{up}C_G(u,v)+(1-D^{lo}-D^{up})C_t\tag{8}$$

其中 $C_{Cl}(\blacksquare,\blacksquare)$,$C_G(\blacksquare,\blacksquare)$,$C_t(\blacksquare,\blacksquare)$ 分别代表 Clayton Copula 函数、Gumbel Copula 函数和 t-Copula 函数;变量

$$D^{lo}=\begin{cases}1, & \text{当 } u<\varepsilon, v<\varepsilon \text{ 时}, \\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$D^{up}=\begin{cases}1, & \text{当 } u>1-\varepsilon, v>1-\varepsilon \text{ 时}, \\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

ε 为给定的阈值,通常 $0<\varepsilon<0.5$。

当样本数据处于不同区域时,变量之间的结构就不相同,例如当 $u<\varepsilon, v<\varepsilon$ 时,样本数据处于样本区域的下尾区域,此时 $C=C_{Cl}(\blacksquare,\blacksquare)$,说明该模型反映了变量之间的相关结构的时变性和变结构性。与静态的 Copula 函数相比,它能更好地刻画变量之间尾部的相关特性。尽管在整个样本区域中 C 模型并不是一个 Copula 函数,但式(8)具有尾部变结构特性的 Copula 模型形式,可以捕捉到变量之间的相关结构的变化。为了叙述方便,仍称 C 模型为具有尾部变结构特性的 Copula 函数[6]。

由以上讨论,具有尾部变结构的二元 Copula-GARCH 模型表示为

$$\begin{cases} r_{it}=\mu_t+\varepsilon_{it}, \\ \varepsilon_{it}=\sqrt{h_{it}}\zeta_{it}, \quad \zeta_{it}\overset{i.i.d}{\sim}t(v_i), \\ h_{it}=\omega_i+\alpha_i\varepsilon_{i,t-1}^2+\beta_i h_{i,t-1}, \\ (\zeta_{1t},\zeta_{2t})\sim C(T_{v_1}(\zeta_{1t}),T_{v_2}(\zeta_{2t})), \end{cases}\tag{9}$$

其中模型 C 由式(8)给出。$T_{v_i}(\blacksquare)$ 表示自由度为 v_i 的 t 分布函数。

3　实证分析

3.1　样本的选取与描述

为了考察上海股市和深圳股市之间的相关关系，本研究选取上证综合指数和深证成分指数的每日收盘价为样本，共选取 2002 年 1 月 1 日至 2008 年 12 月 31 日共 1817 个交易日的收盘价作为样本数据。将收益率取为 $r_t = 100(\ln p_t - \ln p_{t-1})$，其中 p_t 为 t 时刻市场指数收盘价。收益率 r_t 中乘以 100 是为了更好地观察其统计特征。

3.2　对 2 种指数的收益率用 GARCH 模型拟合

对上证综指和深证成指收益率序列的边缘分布采用 GARCH(1,1)-t 模型描述。运用 Eviews 6.0 软件，各指数收益率序列的参数估计结果见表 1。另外根据估计得出 GARCH(1,1)-t 模型，求出两指数收益序列的残差序列$\{\hat{\zeta}_{1t}\}$、$\{\hat{\zeta}_{2t}\}$，图 1、图 2 给出两残差序列的分布与对应的 t 分布的分位数对比图(Q-Q 图)，由于图中数据点呈直线关系，则 2 个 Q-Q 图都直观地表明 GARCH(1,1)-t 模型能较好拟合各序列的边缘分布。

表 1　边缘分布模型的参数估计及检验结果

Table1　Parameter estimation and result of marginal distribution model

指数名称	参数估计					检验结果	
	μ	ω	α	β	ν	似然对数值	AIC
上证综指	0.054 849	0.028 856	0.065 175	0.929 019	5.782 575	−3 437.701	3.791 520
深证成指	0.073 891	0.032 037	0.061 738	0.932 842	6.203 037	−3 614.467	3.986 197

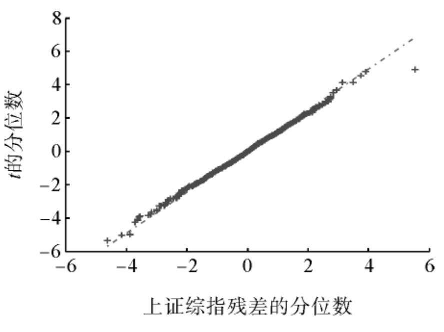

图 1　上证综指残差与 $t(n)$ 分布(n=5.782 575)的 Q-Q 图

Fig. 1　Q-Q figure of Shanghai composite index residual and $t(n)$ distribution(n=5.782 575)

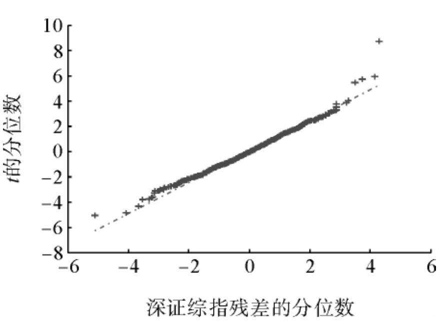

图 2　深证成指残差与 $t(n)$ 分布(n=6.203 037)的 Q-Q 图

Fig. 2　Q-Q figure of Shenzhen componrnt index residual and $t(n)$ distribution(n=6.203 037)

3.3　Copula 的参数估计结果

根据估计出的 GARCH(1,1)-t 模型可以确定上证综指和深证成指收益率序列的条件边缘分布，对两残差序列进行概率积分变换后可以得到 2 个新序列，用对应于不同的 ε 值具有尾部变结构的 Copula 函数描述新序列间的相关结构，利用 Matlab2009 软件采用两阶段极大似然估计来估计其参数[10]，结果见表 2 和表 3。两表中的检验统计量 M 是服从 χ^2 分布的用来评价 Copula 函数的拟合度[3]，能判定选定的 Copula 函数是否合适以及能否正确地描述变量间的相关结构。以二元情况为例，构造一个包含 $k \times k$ 个单元格的表格 G，记 A_{ij} 为落入单元格 $G(i,j)$，$(i,j=1,2,\cdots,k)$ 内的实际观测点个数，p_{ij} 表示由服从 Copula 函数预测得出的点落在落入单元格 $G(i,j)$ 的概率，χ^2 检验统计量 M 可表示 $M = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{(A_{ij}-p_{ij})^2}{p_{ij}/n}$，其中根据样本总数和观测点的分布情况，选取 $k=20$。χ^2 拟合检验法要求每个 np_{ij} 都不小于 5，否则应适当地合并单元格，若模型包含 p 个参数，合并的单元格数为 q，则自由度将为 $(k-1)^2-p-(q-1)$。

在区间[0.05,0.5]均匀选取 10 组数据，令模型中阈值 ε 分别等于这 10 个数，最后由表 2 中统计量 M 方法表明：对应于不同的 ε 值具有尾部变结构的 Copula 函数对 2 种指数的刻画能力差别很大，其中 $\varepsilon \leqslant 0.35$ 的函数可较好地描述不同时期

两变量间的相关关系。并且由表3知,与单一的3种常见的Copula函数相比,$\varepsilon \leqslant 0.35$的具有尾部变结构的Copula函数对样本的拟合度较优,其次为t-Copula函数,再者为$\varepsilon > 0.35$的具有尾部变结构的Copula函数及Gumbel函数,而Clayton函数对样本的拟合度较差。

表2 对应于不同ε的Copula函数参数估计结果

Table 2 Parameter estimation of Copula function with different ε

ε值	Clayton参数	Gumbel参数	t-Copula参数	t-Copula自由度	统计量M	自由度
0.05	3.420 3	4.089 8	0.949 0	5.236 5	270.250 4	94
0.1	2.968 2	4.073 4	0.948 0	4.904 3	270.929 9	94
0.15	3.241 3	4.029 9	0.946 4	4.833 8	272.386 1	94
0.2	3.414 6	3.831 3	0.945 3	4.338 1	272.529 3	94
0.25	3.618 9	3.931 3	0.942 7	4.143 3	278.691 2	98
0.30	3.732 6	4.068 8	0.938 9	3.878 1	287.312 2	97
0.35	3.707 8	4.133 1	0.936 3	3.423 4	290.037 9	89
0.40	3.838 9	4.192 3	0.921 6	3.012 3	338.076 2	94
0.45	4.033 1	4.143 9	0.914 3	2.672 0	347.045 9	90
0.50	4.192 9	4.232 7	0.871 6	13.006 7	420.480 6	94

表3 静态Copula函数参数估计结果

Table 3 Parameter estimation of Static Copula function

Copula函数	参数	t-Copula自由度	统计量M	自由度
Clayton	5.276 6		662.519 6	153
Gumbel	4.670 2		346.728 5	138
t	0.949 9	4.882 6	295.684 2	134

4 结 语

本研究根据几种常见的Copula函数在相关性分析上的优劣,首次提出了由于Gumbel Copula、Clayton Copula和t-Copula 3种函数构成的相关性模型:具有尾部变结构的Copula模型,最后利用χ^2拟合检验法实证分析表明:与单一的Copula函数相比,具有尾部变结构的Copula函数分布更接近于经验联合分布,更形象地刻画出金融市场之间的尾部相关模式存在跳跃、动态变化的变结构特性;对于10个不同的ε值,运用统计量M方法验证表明:对于$\varepsilon \leqslant 0.35$的尾部变结构的Copula函数能较准确地反映不同时期上海和深圳股票市场间的动态的、非对称的相关关系。总之,从具有变尾部结构Copula函数的构建方式上,理论上得知该模型能较准确地刻画金融市场间的复杂相关关系;从实证分析又表明,阈值ε在一定范围内取值时,该改进的Copula函数能较准确地反映我国两股票市场间的动态的、非对称的相关关系。作为一种描述多变量间相关关系的新方法,Copula理论为投资组合风险问题提供了更可行、更有效地新思路,同时随着计算机技术及相关学科的发展,Copula理论也将不断完善,将进一步推动Copula理论的应用。

参 考 文 献

[1] Patton A J. Modeling Time-Varying Exchange Rate Dependence Using the Conditional Copula[R]. San Diego: Department of Ecomomics, University of Califormia, 2001.

[2] Rodriguez I C. Measuring financial contagion: a Copula approach[J]. Journal of Empirical Finance, 2003, 14(3): 401-423.

[3] Hu L. Essays in Econometrics with Applications in Macroeconomic and Financial Modeling[D]. New Haven: Yale University, 2002.

[4] 韦艳华,张世英,郭焱.金融市场相关程度与相关模式的研究[J].系统工程学报,2004(19):355-362.

[5] 包成军,徐成贤.基于SV-Copula模型的相关性分析[J].统计研究,2008,25(10):100-104.

[6] 韦艳华,张世英.Copula理论及其在金融分析上的应用[M].北京:清华大学出版社,2008:94-126.

[7] Sklar A. Fonctions de repartition n dimensions et leures marges[J]. Publication de l'Institut de Statistique de Universite de Paris, 1959, (8): 229-231.

[8] Bollerslev T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity[J]. Journal of Econometric Review, 1986(31): 307-327.

[9] 陈友强.基于动态Copula函数的VaR估计及其应用[D].厦门:厦门大学,2009.

[10] Little R J A, George C. Theory of Point Estimation[M]. New York: Springer, 1998: 71-80.

(责任编辑 姜丰辉)