

剪切流作用下超大型浮体的非线性水弹性响应¹⁾

王 革^{*,2)}, 王永岩⁺

^{*} (青岛科技大学 数理学院, 青岛 266061) ⁺ (青岛科技大学 机电学院, 青岛 266061)

摘要: 本文研究了在剪切流和深水行进波的共同作用下超大型海洋浮体(VLFS)的非线性水弹性响应问题。针对垂向速度呈指数分布的有旋剪切流情形, 提出引入流函数构建物理模型的方法, 并运用不依赖于任何物理小参数的同伦分析方法(HAM)求得收敛的近似解析解。最后利用计算结果详细讨论了几种重要物理量对板的非线性水弹性响应的影响, 我们发现指数剪切流与行进波同向时, 涡量越大板的波形波幅越尖波谷越平坦; 而指数剪切流与行进波反向时, 效果与之相反。

关键词: 非线性水弹性波, 超大型海洋浮体, 剪切流, 同伦分析法

引言

随着现代社会的飞速发展, 非再生资源如石油、天然气等被无节制的开发利用, 人类面临新一轮能源危机与环境污染问题。同时现代世界人口密度急剧地增长, 全球对新能源的开发和土地的需求日益迫切。能有效利用海上空间和海洋资源的各种海洋超大型浮体(VLFS)引起了国内外海洋工程和学术界的广泛关注和研究。VLFS是一种具有经济、环保、安全、方便等优点的海上建筑物, 可被当做海上机场、浮式码头、储油设施、风力发电厂、生存娱乐设施、军事基地等^[1]。最近据报道我国三亚为解决机场负荷过重的问题, 预计2016年底将建造距离岸边约4公里、距离市中心约35公里的离岸式海上机场。在风、浪、流等复杂海洋环境的作用下, 飘浮在海洋表面的VLFS会发生较大的弹性形变。因此, 在应用研究中, VLFS通常被简化为弹性板(梁)模型, 采用Kirchhoff-Love薄板理论或者Mindlin-Reissner厚板理论描述内力和形变的关系。并需要利用水弹性理论(hydroelasticity)研究由弹性板而产生的水弹性波动力特性以分析其水动力响应^[2-4]。

目前, 大部分研究采用线性水弹性理论分析与计算为主。Sturova^[5]用模态展开研究了漂浮在流体中的弹性圆板在非定常载荷作用下的水弹性响应, 指出圆板和无限长板的水弹性响应有本质的区别。Wu^[6]等运用本征函数展开法分析了在波浪作用下弹性板的散射问题。Xu和Lu^[7]通过构造另外的内积, 使得在新内积意义下原本本征函数具有正交性, 从而使极大提高了确定展开式系数的计算效率。然而, 线性水弹性波模型是基于小振幅和小挠度的假设下, 并未考虑真实海洋环境中流场的非线性效应。特别是在恶劣天气中大风会引起较大振幅波浪和急流的出现, 此时水弹性波具有较明显的非线性。因此, 研究非线性水弹性波动力特性问题具有重要的理论和工程实际意义。再者, 海洋环境中波浪和水流往往是共同存在, 波流耦合作用于弹性板是其环境载荷的主要部分。目前大部分关于来流作用下的相关研究均假定水流是均匀的。例如Lu和Yeung^[8]研究了线载荷和均匀流共同作用对非定常线性水弹性波的耦合动力特性, 结果发现流速与相速或者群速比值参数对挠曲重力波有重要的作用。然而, 来流通常并不具有如此简单的速度剖面, 会随着水深而变化而变化, 这样就产生涡量。为此, 本文研究垂向速度呈指数形式分布的有旋剪切流作用下非线性水弹性波的耦合动力特性, 并对近似解析结果进行深入讨论。

1 数学模型

本文考虑二维问题。如图1所示, 建立直角坐标系 oxz , 其中 oz 轴以铅直向上为正, ox 轴与静止时水面重合, 水平向右为正。无限长弹性板漂浮在无限深水面上并沿 ox 轴向两方向无限延伸, 板厚度为 d , 吃水为零。水流沿水平方向流动。在有行进波运动的情况下, 我们将采用随波移动坐标系即 $(x-ct, z) \rightarrow (x, z)$ (c 为波速)。

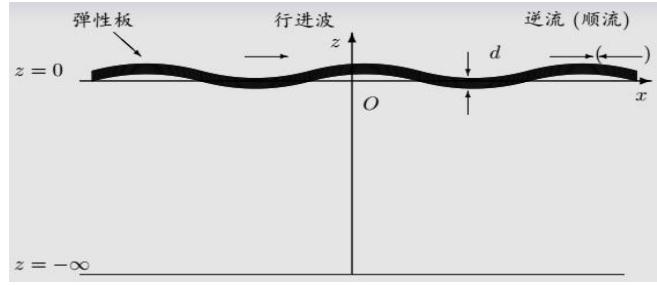


图 1 剪切流作用下无限长弹性板的水弹性响应坐标示意图

Fig 1 Schematic diagram for the hydroelastic response of an infinite elastic plate in a shear current the interaction between incident

考虑到垂向速度呈指数分布的定常剪切流情形，流体存在涡量，流体无粘但是有旋，为此引入流函数 $\psi(x, z)$ 所得控制方程为：

$$\nabla^2 \psi = -\Omega(\psi), \quad (z \leq \zeta(x)) \quad (1)$$

其中涡量 $\Omega(\psi) = \mu \exp(-\psi)$ ， μ 为涡量参数。

在弹性板与流体交界面 $z = \zeta(x)$ 得到运动学和动力学边界条件分别为：

$$\psi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + g\zeta + \frac{1}{\rho} [D \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m_e g] = 0, \quad (3)$$

其中 ρ 是流体密度， g 是重力加速度，板的抗弯刚度 $D = Ed^3 / [12(1-\nu^2)]$ ， E 为板的杨氏模量， d 是板厚度， ν 是 Poisson 比， $m_e = \rho_e d$ ， ρ_e 是板密度。

在流体底部，根据固壁的非渗透条件有：

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (z = -\infty). \quad (4)$$

计算时，首先利用 Dubreil-Jacotien 变换，原模型从 oxz 坐标面转换为 $ox\psi$ 坐标面，使未知边界固定。即铅直波形 z 看成坐标 x 和流线 ψ 的函数，即 $z = z(x, \psi)$ ，于是自由边界固定于 $\psi = 0$ ，由此原控制方程和边界条件分别变为：

$$\begin{aligned} z_{xx} z_\psi^2 - 2 z_x z_\psi z_{x\psi} + (1 + z_x^2) z_{\psi\psi} &= z_\psi^3 \Omega(\psi), \quad \psi > 0 \\ \frac{1}{2} (1 + z_x^2) z_\psi^{-2} + gz + \frac{1}{\rho} [D \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + m_e g] &= Q, \quad \psi = 0 \\ z_x &= 0, \quad \psi = +\infty \end{aligned} \quad (5)$$

其中 Q 是待求常数。

在水弹性力学中，常常习惯使用无量纲方程。我们引入如下的无量纲变量

$$\begin{aligned} x^* &= kx, z^* = kz, \psi^* = \frac{k}{c} \psi, \Omega^*(\psi) = \Omega(\psi) / (kc), m_e^* = km_e / \rho, \rho_e^* = \rho_e / \rho, \\ D^* &= k^4 D / (\rho g), E^* = kE / (\rho g) \end{aligned} \quad (6)$$

其中带星号的量是有量纲的。于是方程组(5)变成

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \psi} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} &= \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^3 \Omega(\psi), & \psi > 0 \\ \frac{1}{2} \delta \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] + (gz + D \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + m_e g - \kappa) \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2 &= 0, & \psi = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, & \psi = +\infty \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\delta = c^2 / c_0^2$, $c_0^2 = k / g$, $\kappa = kQ / g$ 。无量纲波高 $H = kH^*$ 定义为

$$H = z(0, 0) - z(\pi, 0) \quad (8)$$

2 HAM 求解方法

2.1 零阶形变方程

首先考虑同伦分析法的基函数和解表达形式。仅从数学方程的角度，我们是不可能得到未知待求解的形式的，但是基于 HAM 能提供很大的自由选取初始猜测解和线性算子。这里特别说明：根据物理背景，流场是由一系列非线性水弹性行进波和具有指数分布涡量的定常来流组成，基于线性理论得知在表面 $\psi = 0$ 静水深水波 ($\Omega = 0$) 周期解表达为：

$$z = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(mkx), \quad (9)$$

其中 k 为波数。而对于有旋剪切流，解表达中也应包含指数项 $\exp(-m\psi)$ 。此外，这里假设弹性板是均匀弹性薄板，且板和流体不分离。于是本项目猜测水弹性波波形的初始解可以表达为：

$$z = -\frac{k}{c}\psi + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \exp\left(-\frac{k}{c}\psi\right) \cos(mkx), \quad (10)$$

其中 $a_{n,m}$ 为待求系数。

利用方程组(7)，构建零阶形变方程：

$$\begin{aligned} (1-q)L_1[Z(x, \psi; q)] &= qc_0 N_1[Z(x, \psi; q)], & \psi > 0 \\ (1-q)L_2[Z(x, \psi; q)] &= qc_0 N_2[Z(x, \psi; q)], & \psi = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} L_1[Z(x, \psi; q)] &= \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi} \right)^2 - 2 \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial \psi} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial \psi} + \left[1 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\partial Z}{\partial \psi} \right)^3 \Omega(\psi), & N_1[Z(x, \psi; q)] &= \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}, \\ L_2[Z(x, \psi; q)] &= \frac{1}{2} \delta \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right] + (Z + D \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4} + m_e g - \kappa) \left(\frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2, & N_2[Z(x, \psi; q)] &= Z + \frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

$q \in [0, 1]$ 为嵌入变量。当 q

连续地从 0 增大到 1 时， $K(q)$ 连续地从 $k_0 \rightarrow k$ ， $Z(x, \psi; q)$ 连续地从 $z_0(x, \psi) \rightarrow z(x, \psi)$ 。

2.2 高阶形变方程

应用 Taylor 展开定理，将未知解展开为

$$Z(x, \psi; q) = z_0(x, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x, \psi) q^n, \quad (12)$$

$$K(q) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n q^n, \quad Q(q) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n q^n,$$

将展开式(12)代入零阶形变方程(11)中,使方程两端关于 q 同次项的系数对应相等,得到高阶形变方程,此时将非线性问题化为多个线性子问题。并通过使选取最优的收敛控制参数 c_0 获得收敛的同伦近似解析解

具体地,当 $q=1$ 时,如果选取的 c_0 能使公式(12)中的级数解收敛,我们能得到同伦级数解

$$z(x, \psi) = Z(x, \psi; 1) = z_0(x, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x, \psi), \quad (13)$$

$$k = K(1) = k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n, \quad Q = Q(1) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n,$$

在实际问题中,我们通常取 n 为有限数,得到 n 阶近似级数解。

2.3 最优收敛控制参数

为了选取收敛控制参数 c_0 的最优解,对应两个边界条件(11)的平方残差分别定义为

$$\varepsilon_m^1 = \frac{1}{1+M} \sum_{i=0}^M (N_1[z(x, \psi)]|_{x=i\Delta x})^2 \quad (14)$$

$$\varepsilon_m^2 = \frac{1}{1+M} \sum_{i=0}^M (N_2[z(x, \psi)]|_{x=i\Delta x})^2 \quad (15)$$

其中 M 表示离散点的总数,并设 $\Delta x = \pi / M$ 。本文选取 $M=10$ 。为简化计算,我们定义总平方残差如下

$$\varepsilon_m^T = \varepsilon_m^1 + \varepsilon_m^2 \quad (16)$$

然后通过平方残差图,在使 ε_m^T 最小的情形下,选取 c_0 的最优解。

3 数值结果和讨论

首先,为保证剪切流作用下无限长板水弹性响应问题的同伦级数解的收敛性,我们令计算中的无量纲参数分别为 $\mu=0.2, H=0.5, d=0.05, \rho_e=0.9, \nu=0.33, E=12822.8$ (对应有量纲 $E=10^9 Pa$)。图2显示了几阶近似解的总对数平方残差 $\log \varepsilon_m^T$ 随着收敛控制参数 c_0 的变化。我们可以发现,每阶解都存在 $\log \varepsilon_m^T$ 的最小值即最优解。比如当 $m=4$ 时, c_0 的最优解在 $[-1, -0.8]$ 之间。从表1中得到,令 $c_0=-0.8$ 时,随着阶数 m 的增加, ε_m^T 值逐渐减少。特别地,当 $m=7$ 时, ε_m^T 的最小值达到 2.14×10^{-5} 。这些结果表明我们求得同伦近似解析解是精确和收敛的。运用同样选择 c_0 的最优解方法,我们能保证在随后讨论的情形下所有解都是十分精确和收敛的。

图3和图4分别描绘了波高 $H=0.5$ 的不同来流作用下弹性板在波峰附近和波谷附近的波形。令涡量 $-0.25 \leq \mu \leq 0.25$ 。从图中可以发现,对于相同波高的行进波,逆水指数剪切流使得波形波峰更尖锐,而

波谷更平坦；然而，顺水指数剪切流使得波形波峰更平坦，而波谷更尖锐。

参考文献

- 1 崔维成, 吴有生. 超大型海洋浮式结构物开发过程需要解决的关键技术问题. 海洋工程, 2000, 18(3): 1-8
- 2 缪国平, 刘应中. 征服海洋之梦—超大型浮式海洋结构物. 自然杂志, 1996, 18(1): 26-30
- 3 王振宇, 张彪, 刘国华. 浮式海洋结构的应用与前景. 中国海洋平台, 2009, 24(1): 10-14
- 4 陈徐均, 董克, 潘小强等. 海洋浮体水弹性力学研究历史与现状. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2003, 4(6): 41-49
- 5 Sturova I V. Response of unsteady external load on the elastic circular plate floating on shallow water. Proceedings of the 18th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Le Croisic, France, 2003: 177-180
- 6 Wu C, Watanabe E, Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate. Applied Ocean Research, 1995, 17(5): 301-310
- 7 Xu F, Lu D Q. An optimization of eigenfunction expansion method for the interaction of water waves with an elastic plate. Journal of Hydrodynamics, 2009, 21(4): 526-530
- 8 Lu D Q, Yeung R W. Hydroelastic waves generated by point loads in a current. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 2015, 25(1): 8-12

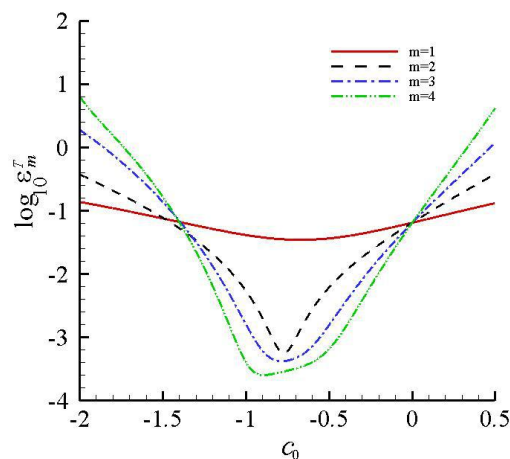


图 2 不同阶数 m 下对数平方残差 $\log_{10} \varepsilon_m^T$ 随 c_0 的变化

Fig.2 Logarithm residual squares of $\log_{10} \varepsilon_m^T$ of the m -th order homotopy approximation c_0

表 1 当 $c_0 = -0.8$ 时, 不同阶数 m 下总对数平方残差 ε_m^T 的变化

Table 1 The total residual square error ε_m^T

for different approximation order m with $c_0 = -0.8$

m	ε_m^T
1	3.56×10^{-2}
2	6.23×10^{-4}
3	4.22×10^{-4}
4	1.25×10^{-4}
7	2.14×10^{-5}

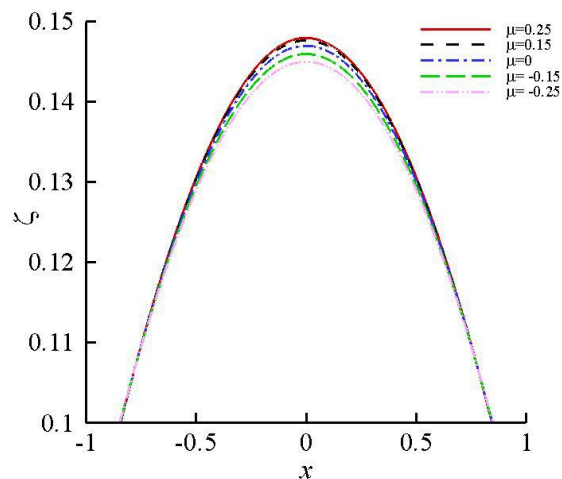


图 3 不同来流之上的行进波在波峰附近的波形。其中波高 $H = 0.3$ ，涡量参数 $-0.25 \leq \mu \leq 0.25$

Fig 3 Wave elevations near the crest in case of $H = 0.3$ and $-0.25 \leq \mu \leq 0.25$.

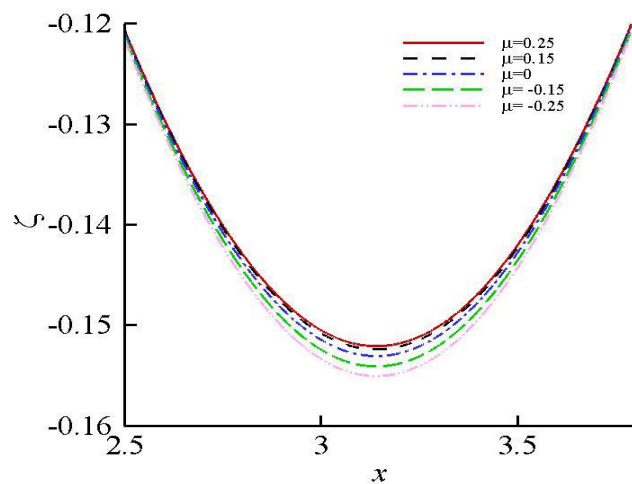


图 4 不同来流之上的行进波在波谷附近的波形。其中波高 $H = 0.3$ ，涡量参数 $-0.25 \leq \mu \leq 0.25$

Fig 4 Wave elevations near the trough in case of $H = 0.3$ and $-0.25 \leq \mu \leq 0.25$.

THE HYDROELASTIC RESPONSE OF AN INFINITE ELASTIC PLATE IN A SHEAR CURRENT¹⁾

Wang Ping^{*2)}, Wang Yongyan⁺

**(School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)*

+ (College of Electromechanical Engineering , Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: In this paper, the nonlinear hydroelastic response of very large floating structures (VLFSs) is investigated analytically in a shear current. As for a steady shear current with a vertical distribution of vorticity, we introduce the stream function to construct physical models, and derive the convergent analytical series solutions by using of the homotopy analysis method (HAM). Finally, the effects of several important physical parameters on the hydroelastic response of the floating plate are considered. Furthermore, we find that the plate deflection tends to be sharpened at the crest and be flattened at the trough as the aiding exponential shear current increases, while the opposing exponential shear current causes opposite effect on the hydroelastic response of the elastic plate.

Key word: nonlinear hydroelastic response, very large floating structures (VLFSs), shear current, homotopy analysis method (HAM)