

基于 special Cosserat 板理论的超大型海洋浮体的非线性水弹性响应¹⁾

王 苹^{*2)}, 王永岩⁺

^{*} (青岛科技大学数理学院, 青岛 266061) ⁺ (青岛科技大学机电学院, 青岛 266061)

摘要: 研究了漂浮在流体表面的超大型浮体的非线性水弹性响应。基于 special Cosserat 板理论将浮体简化为弹性 Plotnikov and Toland 板, 在势流理论的框架下控制方程和反映水动力、惯性力和弹性力耦合作用的边界条件。运用同伦分析方法分析了一些重要参数对板的水弹性相应的影响, 并比较了将浮体简化为非线性板和简化为线性板的差别。结果发现在较小板挠度情形下, 两种板响应没有差别; 然而到板挠度较大时, Plotnikov and Toland 板发生较大的形变。最后, 分析了角频率和波振幅的关系。

关键词: 非线性水弹性响应, special Cosserat 板理论, 同伦分析方法(HAM)

引 言

几十年来, 研究超大型海洋浮式结构物 (Very Large Floating Structures, 简称 HAM) 的水弹性响应问题引起了越来越多学者的关注。其中一个关键问题是在如何分析波浪作用下 HAM 的形变。目前, 大部分学者基于 Kirchoff--Love 板理论将 HAM 简化为线性或非线性弹性板。Meylan^[1] 将浮冰简化为线性 Kirchoff--Love 板, 结果发现板刚度是决定板的形变、散射最重要的因素。考虑到在恶劣海洋环境下, 弹性板会发生大的形变, Parau and Dias^[2] 将浮冰当做非线性的 Kirchoff--Love 板, 并详细分析了在浅水中重力波的波速以及最小相速问题。考虑到流体表面张力和板曲率对板形变的影响, 本文将 HAM 简化为非线性 Plotnikov and Toland 板, 在大振幅波作用下研究浮体的非线性水弹性响应问题。

1 建模和近似解析计算

1.1 建模

考虑二维问题。建立直角坐标系 oxz , 其中 oz 轴以铅直向上为正, ox 轴与静止时水面重合, 水平向右为正。无限长弹性板漂浮在无限深水面上并沿 ox 轴向两方向无限延伸, 板厚度为 d , 吃水为零。假设流体是无粘的、不可压缩的且运动是无旋的, 则速度势存在且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (z \leq \zeta(x)) \quad (1)$$

在流体底部, 根据固壁的非渗透条件有:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad (z = -\infty). \quad (2)$$

在弹性板与流体交界面 $z = \zeta(x)$ 得到运动学和动力学边界条件分别为:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + g\zeta + \frac{p_e}{\rho} = B, \quad (4)$$

其中 B 是伯努利常数 (通常简化为 0)。 ρ 是流体密度, g 是重力加速度。 p_e 是波-板交界面的压力。基于非线性 Plotnikov and Toland 板理论, 我们令

$$p_e = -T\kappa + D\left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\kappa^3\right) \quad (5)$$

其中 T 是流体表面张力系数, 板的抗弯刚度 $D = Ed^3/[12(1-\nu^2)]$, E 为板的杨氏模量, d 是板厚度, ν 是 Poisson 比, $m_e = \rho_e d$, ρ_e 是板密度, κ 是板曲率。

同 Wang and Lu^[3] 相同, 根据行波法, 我们引入一个独立变量变换

$$X = kx - \omega t \quad (7)$$

并利用相同无量纲化后, 原方程组变为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \\ -\omega \frac{\partial \zeta}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{\partial \zeta}{\partial X} - \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0, \\ -\omega \frac{\partial \phi}{\partial X} + f + \zeta + p_e &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

其中板的抗弯刚度 $f = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right]$ 。

1.2 近似解析计算

本文仍然使用 Wang and Lu^[3] 中的同伦分析方法进行近似计算, 其中构建的解表达和初始猜测解是相同的, 基于方程组 (6), 我们构建非线性算子 N_1 和 N_2 分别为

$$N_1[\Phi, \eta] = -\omega \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{\partial \eta}{\partial X} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (7)$$

$$N_2[\Phi, \eta] = \left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{9}{2}} \tilde{N}_2[\Phi, \eta], \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{N}_2[\Phi, \eta] &= -\omega \frac{\partial \Phi}{\partial X} + F + \eta + P_e, \quad F = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right], \\ P_e &= \frac{T \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{D\left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} + \frac{\partial^4 \eta}{\partial X^4} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2 - 4 \frac{\partial \eta}{\partial X} \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} - 3\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2}\right)^3\right]}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{7}{2}}} \\ &+ \frac{-6D\left[\frac{\partial^3 \eta}{\partial X^3} \left(1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right) - 3 \frac{\partial \eta}{\partial X} \cdot \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right] \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2} + \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial X^2}\right)^3}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X}\right)^2\right]^{\frac{9}{2}}}. \end{aligned}$$

基于同伦分析方法思想, 我们选取线性算子 L_1 和 L_2 分别为

$$L_1[\Phi, \eta] = -\frac{\partial \Phi(X, z; q)}{\partial z} \quad (9)$$

$$L_2[\Phi, \eta] = -\frac{\partial \Phi}{\partial X} + \eta \quad (10)$$

当嵌入算子 q 连续地从 0 增大到 1 时, $\eta(X; q)$ 连续地从 $\zeta_0(X) \rightarrow \zeta(X)$, $\Phi(X, z; q)$ 连续地从 $\phi_0(X, z) \rightarrow \phi(X, z)$, $\omega(q)$ 连续地从 $\omega_0 \rightarrow \omega$ 。

我们使用同 Wang and Lu^[3] 中相同的关于 $\eta(X; q)$ 和 $\Phi(X, z; q)$ 麦克劳林级数, 另外我们设

$$\omega(q) = \omega_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \omega_m q^m \quad (11)$$

随后的计算流程和 Wang and Lu^[3] 相同。

2 结 论

首先, 为了保证浮体水弹性响应问题的同伦近似解析解具有精确性和收敛性。我们令计算中的无量纲参数分别为 $\omega_0=0.7$, $\rho_e=0.9$, $a=0.1$, $d=0.01$, $k=\pi/25$, $T=(\pi/25)^2 * 0.074 / (10^3 * 9.8)$ 。

$E=12822.8$, $\nu=0.33$ 。除非有特别说明, 随后计算中这些参数将保持不变。图 1.显示了每阶近似

解的总平方残差 $\log_{10} \varepsilon_m^T$ 随着收敛控制参数 c_0 的变化。从图中发现, 对于每阶解总有残差的最小值存在, 且随着阶数 m 增加, $\log_{10} \varepsilon_m^T$ 的最优值越来越小。这里我们取 $c_0 = -0.45$ 。

图 2. 显示了不同行进波振幅下对于非线性 Plotnikov and Toland 板和线性 Kirchoff--Love 板形变的比较。可以看出, 当入射波波幅较小时, 两种弹性板形变几乎相同; 但是随着波幅的增大, 非线性 Plotnikov and Toland 板

形变较大, 和线性板形变相差较大。图 3. 显示了随着刚度 E 减少板挠度变大。最后, 在图 4.中,

分析了不同板厚度和杨氏模量下角频率 ω 和振幅 a 的关系。图中显示当振幅 a 变大时, 角频率也逐渐增大; 而且发现当板的厚度或者杨氏模量增大时, 角频率则减少。

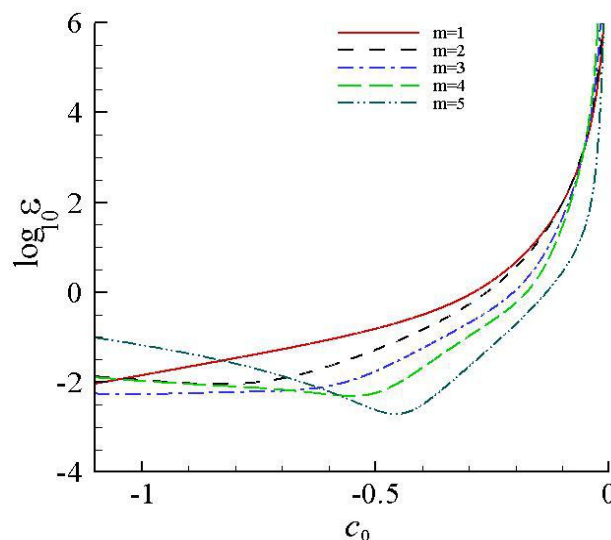


图 1. 不同阶数 m 下平方残差 $\log_{10} \varepsilon_m^T$ 随的变化。

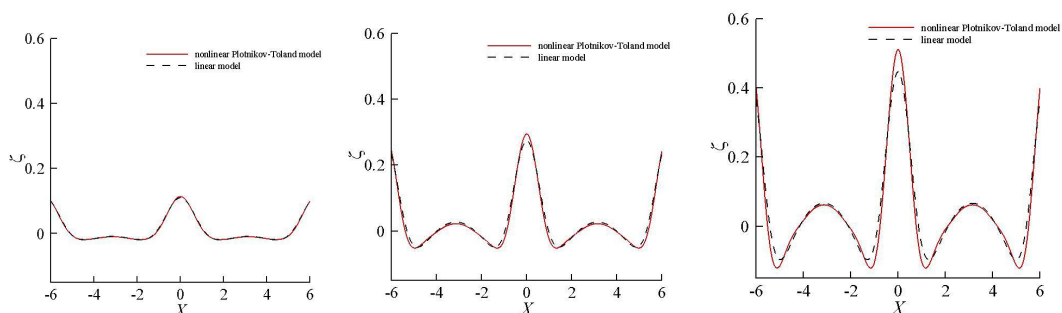


图2. 不同振幅 a 下我们的非线性 Plotnikov and Toland 板和线性 Kirchoff--Love 板形变的比较.

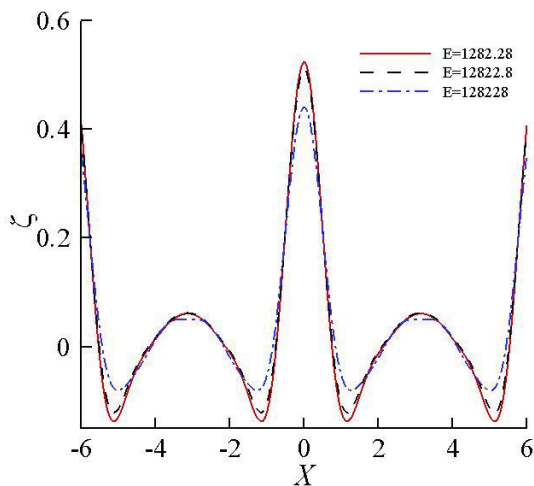


图3. 不同杨氏模量下板挠度 $\zeta(X)$ 沿 X 方向的变化。

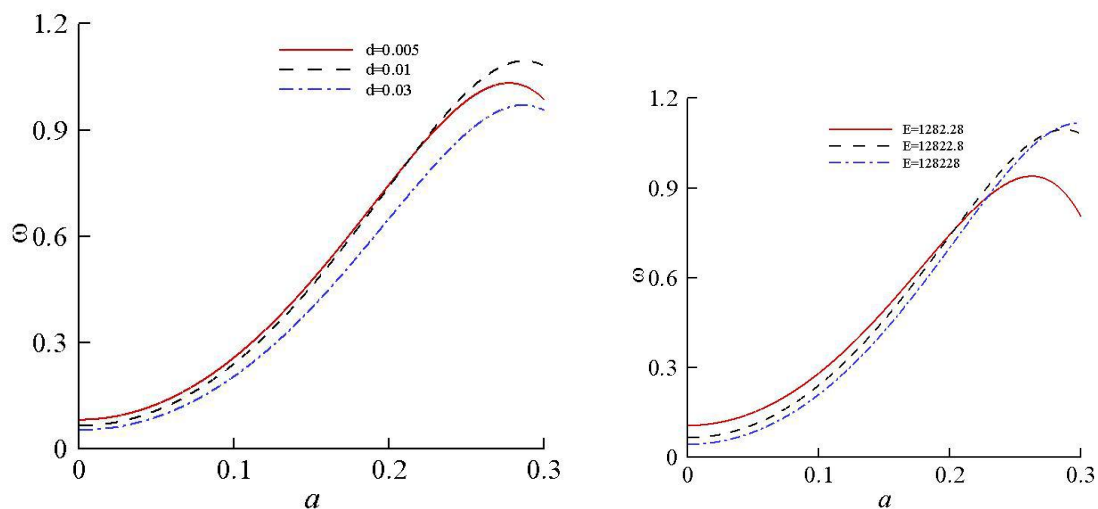


图4. 不同板厚度和杨氏模量下角频率 ω 和振幅 a 的关系.

参考文献

- 1 Meylan M. The wave response of an ice floe of arbitrary geometry. *Journal of Geophysical Research*, 2002, 107(C), 3005-3040.
- . *The Symbolic Universe*. Oxford: Oxford University Press, 1999. 128-144.
- 2 Parau EI, Dias F. Nonlinear effects in the response of a floating ice plate to a moving load. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, 460, 281-305.
- 3 Wang Ping, Lu Dongqiang. Analytic approximation to nonlinear hydroelastic waves traveling in a thin elastic plate floating on a fluid. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics and Astronomy*, 2013, 56, 2170-2177.

NONLINEAR HYDROELASTIC RESPONSE OF A VLFS BASED ON THE SPECIAL COSSERAT PLATE THEORY¹⁾

Wang Ping^{*,2)}, Wang Yongyan⁺

**(School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)*

+(College of Electromechanical Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract : Analytical study of nonlinear hydroelastic waves beneath a very large floating structure (VLFS) floating on the surface of deep water is presented. Adopting the special Cosserat theory of hyperelastic shells to describe the floating ice sheet, we combine with potential flow to formulate the Laplace equation with the dynamic boundary condition expressing a balance among the hydrodynamic, inertial, and elastic forces. For the case of incident progressive waves, the influences of different physical parameters on the hydroelastic waves are discussed with the aid of the homotopy analysis method (HAM). We compare the hydroelastic wave deflections based on nonlinear Plotnikov and Toland's plate model with those obtained by the linear plate model. It is found that the behaviors of both models at small amplitudes are almost the same, while the nonlinear plate deflection increase more greatly than the linear ones at large amplitudes. Further, the graphical comparisons are presented to show the behavior of angular frequency versus the wave amplitude.

Key words : nonlinear hydroelastic response, special Cosserat theory of hyperelastic shells, homotopy analysis method (HAM)