外加移动载荷下均匀流对非线性水弹性波的动力特性作用

王苹，霍鑫泰

(青岛科技大学数理学院，青岛 266061, Email: pingwang2003@126.com)

摘要：本文解析研究了外加移动载荷下定常流对非线性水弹性波的动力特性。假设流体是不可压缩的、无黏的，运动是无旋的，且所涉及波浪为非线性行进波。首先构建由水动力、弹性力、惯性力和外加载荷作用下的控制方程和非线性边界条件。随后借助同伦分析方法 (HAM) 求得收敛的近似解析解，着重研究外加载荷的移动速度对水弹波的影响。

关键词：非线性水弹性波；点载荷；均匀流

1 引言

本文考虑一个二维问题。建立直角坐标系oxz，其中oz轴以铅直向上为正，ox轴与静止水面重合，水平向右为正。无限长弹性板漂浮在水面上，板的厚度为d，吃水为 0，(图 1)。假设流体是无黏的、不可压缩的且运动是无旋的，则速度势存在且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2\phi=0, \qquad (z\le\xi(x,t)) \tag{1}$$

在流体底部，根据固壁的非渗透条件有

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0, \qquad (z=-\infty) \tag{2}$$

记P_0表示作用于板上的移动载荷，$\xi(x,t)$表示在此载荷作用下，弹性板的垂向挠度。在弹性板和流体交界面的表面$z=\xi(x,t)$，运动学边界条件和动力学边界条件分别是

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+U\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \tag{3}$$

$$\rho[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(|\nabla\phi|^2+U^2)+U\frac{\partial\phi}{\partial X}+g\xi]+D\nabla^4\xi+m_e\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=-P_{ext} \tag{4}$$

其中，ρ是流体密度，g是重力加速度，$D=Ed^3/[12(1\text{-}\nu^2)]$是弹性板的抗弯刚度[1-2]，$E$是弹性板的 Young 模量，$d$是板的厚度，$\nu$是 Poisson 比，$m_e$是板的单位质量。

$P_{ext}=P_0\delta(x-Vt)$ 表示作用在弹性板上以速度 V 沿轴向右匀速运动移动载荷，$\delta(\cdot)$ 是 Dirac delta 函数，P_0 为常数。U^2 项即不含有时间变量也不含有位置变量，该项与漂浮板的吃水相平衡，计算时通常将该项忽略。

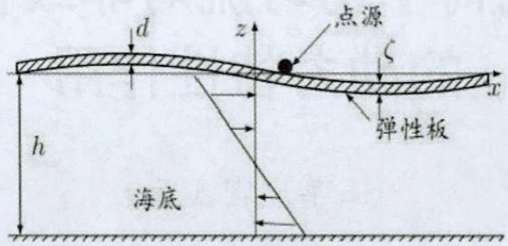


图 1　坐标示意图

根据行波法，我们引入一个独立变量变换

$$X=kx-\omega t \tag{5}$$

其中，k 和 ω 是入射波波数和角频率。因此得到速度势 $\phi(x,z,t)=\phi(X,t)$ 和板挠度 $\xi(x,t)=\xi(X)$.

为了公式，我们引入如下的无量纲变量

$$P_0^*=kP_0/(\rho g),x^*=kx,z^*=kz,t^*=t(gk)^{\frac{1}{2}},d^*=kd,\rho_e^*=\rho_e/\rho,$$

$$\phi^*=k^2\phi/(gk)^{\frac{1}{2}},\xi^*=k\xi,\omega^*=\omega/(gk)^{\frac{1}{2}},m_e^*=km_e/\rho,$$

$$D^*=k^4D/(\rho g),E^*=kE/(\rho g),U^*=U(k/g)^{\frac{1}{2}}$$

方程(1)-(4)分别变为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0,\qquad (z\le\xi(X)) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\qquad (z=-\infty) \tag{7}$$

$$-(\omega-U)\frac{d\xi}{dX}+\frac{\partial\phi}{\partial X}\frac{d\xi}{dX}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\qquad (z=\xi(X)) \tag{8}$$

$$-(\omega-U)\frac{\partial\phi}{\partial X}+f+\xi+D\frac{d^4\xi}{dX^4}+m_e\omega^2\frac{d^2\xi}{dX^2}+P_{ext}=0,\qquad (z=\xi(X)) \tag{9}$$

其中 $f=\frac{1}{2}[(\frac{\partial\phi}{\partial X})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial z})^2]$

通过部分合并方程(6)中的后两个方程，在波-板交界面运动学边界条件变为

$$(\omega-U)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}+\frac{\partial\phi}{\partial z}-(\omega-U)\frac{\partial f}{\partial X}-(\omega-U)(D\frac{d^5\xi}{dX^5}+m_e\omega^2\frac{d^3\xi}{dX^3})$$
$$-\frac{\partial\phi}{\partial X}\frac{d\xi}{dX}=0 \tag{10}$$

我们通过求解方程(6)和方程(7)，方程(9)和方程(10)可得到速度势$\phi(X,t)$和板挠度$\xi(X)$。

2 基于同伦分析方法(HAM)的近似解析分析

构建两个同伦$\Phi(X,z;q)$和$\eta(X;q)$，当q从0连续地变化到1时，$\Phi(X,z;q)$和$\eta(X;q)$分别从初始猜测解$\phi_0(X,t)$和$\xi_0(X)$变化到上面方程组最终的精确解$\phi(X,t)$和$\xi(X)$。

令c_0为非零辅助参数(即 HAM 中的收敛控制参数)，依据方程(6)和方程(7)，方程(9)和方程(10)，我们构建如下零阶形变方程组

$$k^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0,\qquad (z\le\eta(X;q)) \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0,\qquad (z=-\infty) \tag{12}$$

$$(1-q)L_1[\Phi(X,z;q)-\phi_0(X,z)=qc_0N_1[\Phi(X,z;q),\eta(X;q)],\qquad (z=\eta(X;q)) \tag{13}$$

$$(1-q)L_2[\Phi(X,z;q)-\phi_0(X,z)=qc_0N_2[\Phi(X,z;q),\eta(X;q)],\qquad (z=\eta(X;q)) \tag{14}$$

其中线性算子

$$L_1=(\omega-U)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$
$$L_2=\frac{\partial^4\eta}{\partial X^4}+\frac{\partial^2\eta}{\partial X^2}+\eta \tag{15}$$

非线性算子

$$N_1=(\omega-U)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}-(\omega-U)\frac{\partial F}{\partial X}-(\omega-U)(D\frac{\partial^5\eta}{\partial X^5}+m_e\omega^2\frac{\partial^3\eta}{\partial X^3})$$
$$-\frac{\partial\Phi}{\partial X}\frac{\partial\eta}{\partial X}, \tag{16}$$
$$N_2=-(\omega-U)\frac{\partial\Phi}{\partial X}+F+\eta+D\frac{\partial^5\eta}{\partial X^5}+m_e\omega^2\frac{\partial^3\eta}{\partial X^3}+P_{ext},$$

其中 $F=\frac{1}{2}[(\frac{\partial\Phi}{\partial X})^2+(\frac{\partial\Phi}{\partial z})^2]$

将 $\Phi(X,z;q)$，$\eta(X;q)$ 和 $\omega(q)$ 展开为关于 q 的 Maclaurin 级数

$$\Phi(X,z;q)=\sum_{m=0}^{+\infty}\phi_m(X,z)q^m,\ \eta(X;q)=\sum_{m=0}^{+\infty}\xi_m q^m, \tag{17}$$

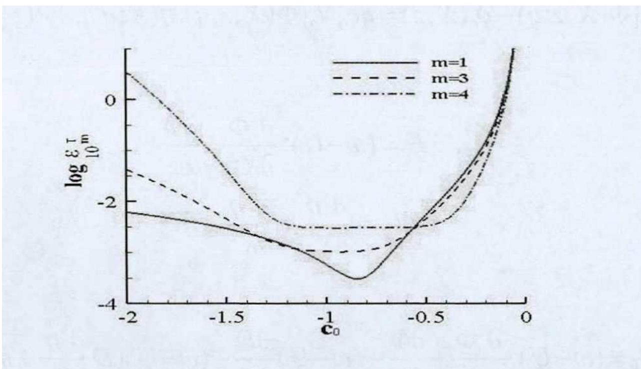
其中 $\{\phi_m(X,z),\xi_m(X)\}=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial q^m}\{\Phi(X,z;q),\eta(X;q)\}\Big|_{q=0}$

将同伦级数解表达(17)代入零阶形变方程组(11)至方程(14)，令方程两边关于 q 的同次幂对应相等，我们得到相应的解耦的线性方程组，称之为高阶形变方程组。

3 数值结果和讨论

3.1 数值结果和讨论

为保证外加移动载荷下均匀流对非线性水弹性波的动力特性作用问题的同伦近似解析级数解的收敛性和正确性。我们令计算中的参数分别为 $E=5GPa,\rho=1025kgm^{-3}$，$\rho_e=922.5kgm^{-3},\upsilon=0.3,g=9.81ms^{-1}$ 除非有特别的说明，随后的计 算中这些参数值将保持不变。如图 2 所示，通过每阶近似解的总平方残差 ε_m^T 随着收敛控制参数 $c_0,\rho_e=922.5kgm^{-3},\upsilon=0.3,d=2.5m$ 的变化，我们发现，每阶解的 ε_m^T 总有最小值存在。而且随着阶数 m 的增加，ε_m^T 值迅速变小。我们能保证在随后讨论的情形下所有解都是非常准确的。



3.2 色散关系

对问题(1)-(4)线性化后，无量纲色散关系[3] [4] [5]为

$$(\omega-U)^2=D-m_e\omega^2+1 \tag{18}$$

在外加载荷移动速度 $V<c_{\min}$ 时，水弹性板在载荷前后两边对称，水弹性波波形与静态点载

荷相似；当移动速度V接近临界速度时，波形才会有更多的震荡，且波幅变大

当外加载荷移动速度$V > c_{min}$时，重力波和水弹性波分别在载荷的后尾区和前置区。

参考文献

1 Parau E I, Bhattacharjee J M. Three-dimensional waves beneath an ice sheet due to a steadily moving pressure. Phil. Tran. R. Soc. A., 2011, 369: 2973-2988.

2 Lu D Q, Yeung R W. Hydroelastic Waves Generated by Point Loads in a Current. Int J Offshore Polar, 2015, 25(1): 8-12.

3 Sahoo T. Interaction of current and flexural gravity waves. Ocean Eng., 2007, 34: 1505-151.

4 Lu D Q, Zhang H. Flexural–gravity wave resistances due to a surface-moving line source on a fluid covered by a thin elastic plate. Theo. Appli. Mech. Let., 2013, 3(2): 022002.

5 Wang P, Wang Y Y, Su C Q, et al. Nonlinear Hydroelastic Waves Generated due to a Floating Elastic Plate in a Current. Adv. Math. Phy., 2007: 1-9.

Nonlinear hydroelastic waves generated by a moving point source in a uniform current

WANG Ping, HUO Xin-tai

(School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061 China.
Email: pingwang2003@126.com)

Abstract: Effects of moving point sources on the nonlinear hydroelastic waves in a uniform current are studied analytically. Under the hypotheses that the fluid is homogeneous, incompressible, and inviscid. For the case of irrotational motion, the Laplace equation is the governing equation, with the boundary conditions expressing a balance among the hydrodynamic, the uniform current, elastic force and a moving point source . It is found that the convergent series solutions, obtained by the homotopy analysis method (HAM), consist of the nonlinear hydroelastic wave profile and the velocity potential. The impacts of important physical parameters are discussed in detail.

Key words: Nonlinear hydroelastic waves; a moving point source; uniform current.