

文章编号: 1672-6987(2024)03-0147-05; DOI: 10.16351/j.1672-6987.2024.03.020

黏弹性板水弹性响应的非线性分析

霍鑫泰, 王 苹*

(青岛科技大学 数理学院; 数学与跨学科科学研究所, 山东 青岛 266061)

摘要: 通过将超大型浮式结构物(a very large floating structure, 简称 VLFS)模拟为黏弹性薄板, 本工作对 VLFS 的非线性水弹性响应进行了解析研究。运用同伦分析方法(the homotopy analysis method, 简称 HAM), 计算出速度势和板挠度的近似迭代解, 并根据计算结果着重探究了几个重要的物理参数对黏弹性板形变的影响。结果发现: 黏弹性板的挠度随着黏弹性时间、杨氏模量和板厚度增加而减少, 而板挠度随着入射波波幅的增加而增加。最后, 还对非线性色散关系和波幅之间的联系进行了探讨。

关键词: 黏弹性板; 同伦分析方法; 非线性水弹性

中图分类号: O 352; O 343

文献标志码: A

引用格式: 霍鑫泰, 王苹. 黏弹性板水弹性响应的非线性分析[J]. 青岛科技大学学报(自然科学版), 2024, 45(3): 147-151.

HUO Xintai, WANG Ping. Nonlinear analysis of a viscoelastic floating structure[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2024, 45(3): 147-151.

Nonlinear Analysis of A Viscoelastic Floating Structure

HUO Xintai, WANG Ping

(College of Mathematics and Physics; Institute of Mathematics and Interdisciplinary Science,
Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266061, China)

Abstract: The nonlinear hydroelastic respond of a very large floating structure (VLFS), which is modeled as a thin viscoelastic plate, is studied analytically. With the aid of the homotopy analysis method(HAM), we derive the iterative solutions of the velocity potential and the plate deflection, and consider the influences of several important physical parameters on the viscoelastic plate. It is found that the deflection of the viscoelastic plate decreases when the retardation time of the plate, Young's modulus, and the thickness of the plate increase. While the deflection increases with an increasing wave amplitude of the incident wave. Further, the connection between the nonlinear dispersion relation and the wave amplitude is also discussed.

Key words: viscoelastic plate; homotopy analysis method (HAM); nonlinear hydroelasticity

超大型浮式结构物(a very large floating structure, 简称 VLFS)主要包括人造的浮式结构物和大面积浮冰, 人造的浮体常被用于建设海上机场、储存

设施或风力涡轮机发电厂等。VLFS 显著几何特征是水平尺度远远大于垂向尺度, 因此在 VLFS 的动力特性的研究中, 通常将其模拟为薄的弹性板或者

收稿日期: 2023-06-09

基金项目: 青岛市博士后人员应用研究项目(020022034).

作者简介: 霍鑫泰(1999—), 男, 硕士研究生. * 通信联系人.

弹性梁。在海洋环境中,考虑结构物与流体之间的相互耦合作用。采用最新的水弹性理论,建立能反映水动力、惯性和弹性力耦合作用的动力学方程。

目前,VLFS 水弹性响应的理论研究主要集中在小波幅线性理论的框架内。而且在少数关于非线性水弹性响应的研究中,研究人员大多采用各种依赖于小物理参数的方法比如摄动法。虽然这些非线性水波方程的研究已经取得了很多成果,但这些依赖于小物理参数的方法在面对强非线性问题时往往会失效^[1]。为了解决强非线性的水波问题,LI-AO^[2-3]提出了不依赖于小物理参数的同伦分析方法(the homotopy analysis method, HAM)。运用该方法 WANG 和 LU^[4]研究了弹性板的非线性水弹性响应,并分析了几个重要物理参数对于板挠度的影响。WANG 和 LU^[5]还运用 HAM 研究了双层流体的密度比和深度比、板的杨氏模量和厚度对于双层流体中水弹性行进波的影响。

以上提到过的成果都将 VLFS 模拟为弹性板^[6]。但因为黏弹性模型能更好地体现现实材料的物理特性,所以部分研究人员开始基于黏弹性模型研究 VLFS。LI 和 LU^[7]运用傅里叶变换解析研究了黏弹性板下弯曲重力波的变化,结果表明匀速直线运动存在速度阈值,而亚临界速度的波阻为零。POGORELOVA^[8]研究了有多个外部载荷的黏弹性板问题,并分析重要参数对波高的影响。最近, XUE 等^[9]运用边界积分方法研究了黏弹性冰层的水弹性响应,根据计算结果分析冰厚、导程宽度和载荷特性对载荷速度的影响。

目前,绝大多数学者将 VLFS 模拟为弹性板。因为 VLFS 的建筑材料具有一定的粘性,所以有必要在数学模型中引入黏弹性项。本工作一方面是构建具有黏弹性项的非线性边界条件,另一方面是用不依赖于任何物理小参数的 HAM 方法对非线性模型进行近似解析计算。通过计算结果重点分析了板形变与重要物理参数的相互关系,为在复杂海况中 VLFS 的水弹性响应提供理论依据,并为 VLFS 的安全建造以及维护提供帮助。

1 数学模型

本工作考虑二维情形下在深水表面的黏弹性薄板的非线性水弹性响应问题。建立直角坐标系 oxz ,其中 oz 轴以垂直向上为正, ox 轴与静止时水面重合,水平向右为正。无限长弹性板漂浮在水面上,板的厚度为 d ,吃水为 0,如图 1 所示。

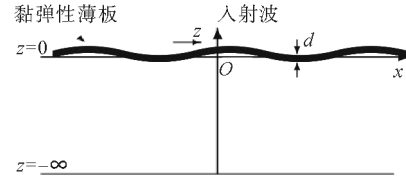


图 1 坐标示意图

Fig.1 Coordinate

假设流体是无黏的、不可压缩的且运动是无旋的,则速度势存在且满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad z \leq \zeta(x, t). \quad (1)$$

其中 $\phi(x, z, t)$ 是速度势, $\zeta(x, t)$ 是漂浮板的挠度。

控制方程满足以下三个边界条件,其中底部边界条件为

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = +\infty. \quad (2)$$

运动学边界条件和动力学边界条件为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = \zeta(x, t), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{D}{\rho} (1 + \tau_\phi \frac{\partial}{\partial t}) \nabla^4 \zeta +$$

$$\frac{M \partial^2 \zeta}{\rho \partial t^2} = 0, \quad z = \zeta(x, t). \quad (4)$$

其中 $D = Ed^3/[12(1-\nu^2)]$ 是板的抗弯刚度, E 是杨氏模量, ν 是泊松比, d 是板厚度; $\tau_\phi = \zeta/E$ 是黏弹性松弛时间; $M = \rho_e d$ 是板单位面积的质量, ρ_e 是板密度。

根据行波法,引进一个自变量变换

$$X = kx - \omega t, \quad (5)$$

其中 k 和 ω 分别是波数和频率。根据式(4),得到 $\phi(x, z, t) = \phi(X, z)\zeta(x, t) = \zeta(X)$ 。将式(5)代入到式(1),同时选择 k, ρ 和 g 作为基础变量,对结果进行无量纲化,则可以得到无量纲化的控制方程

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad z \leq \zeta(X). \quad (6)$$

将式(5)代入到式(2)~(4),同时进行无量纲化,可以得到无量纲化的底部边界条件、运动学边界条件以及动力学边界条件

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -\infty. \quad (7)$$

$$-\omega \frac{\partial \zeta}{\partial X} + \frac{\partial \phi}{\partial X} \frac{d\zeta}{dX} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = \zeta(X). \quad (8)$$

$$D \left(\frac{d^4 \zeta}{dX^4} - \tau_\phi \omega \frac{d^5 \zeta}{dX^5} \right) + M \omega^2 \frac{d^2 \zeta}{dX^2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \omega \frac{\partial \phi}{\partial X} + \zeta = 0, \quad z = \zeta(X). \quad (9)$$

2 同伦分析方法

基于同伦分析方法,分别建立 $\phi(X, z)$ 和 $\zeta(X)$ 相应的同伦 $\Phi(X, z; q)$ 和 $\eta(X; q)$, 构建零阶形变方程

$$(1-q)L_1[\Phi - \phi_0] = c_0 q N_1[\Phi, \eta], \quad z = \eta. \tag{10}$$

$$(1-q)L_2[\eta - \zeta_0] = c_0 q N_2[\Phi, \eta], \quad z = \eta. \tag{11}$$

其中 $\phi_0(X, z)$ 和 $\zeta_0(X)$ 是速度势 $\phi(X, z)$ 和板挠度 $\zeta(X)$ 的初始猜测解。 c_0 是非零控制收敛系数, $q \in [0, 1]$ 是嵌入系数。当 q 从 0 连续地增加到 1 时, $\Phi(X, z; q)$ 从初始猜测解 $\phi_0(X, z)$ 连续变化到精确解 $\phi(X, z)$, $\eta(X; q)$ 从初始猜测解 $\zeta_0(X)$ 连续变化到精确解 $\zeta(X)$ 。

根据无量纲化的运动学和动力学边界条件(8)以及(9),可以得到非线性微分算子 $N_1[\Phi, \eta]$ 和 $N_2[\Phi, \eta]$

$$N_1[\Phi, \eta] = -\omega \frac{\partial \eta}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} \frac{d\eta}{dX} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{12}$$

$$N_2[\Phi, \eta] = D \left(\frac{d^4 \eta}{dX^4} - \tau_\varphi \omega \frac{d^5 \eta}{dX^5} \right) + M\omega^2 \frac{d^2 \eta}{dX^2} + F - \omega \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \eta, \tag{13}$$

其中

$$F = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right). \tag{14}$$

提取非线性算子中对应的线性项,可以得到两个辅助线性算子

$$L_1[\Phi(X, z; q)] = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{15}$$

$$L_2[\eta(X; q)] = \eta + \frac{d^2 \eta}{dX^2} + \frac{d^4 \eta}{dX^4}, \tag{16}$$

其中 $L_n[0] = 0, n = 1, 2$ 。

现将 $\Phi(X, z; q)$ 和 $\eta(X; q)$ 扩展成关于 q 的麦克劳林级数

$$\Phi(X, z; q) = \phi_0(X, z) + \sum_{m=1}^{+\infty} \phi_m(X, z) q^m, \tag{17}$$

$$\eta(X; q) = \zeta_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} \zeta_m(X) q^m, \tag{18}$$

其中

$$\{\phi_n(X, z), \zeta_n(X)\} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial q^m} \{\Phi(X, z; q), \eta(X, q)\} \Big|_{q=0}. \tag{19}$$

将式(17)和(18)代入到零阶形变方程组(10)和(11),使方程两边 q 的同次幂系数相等,得到高阶形

变方程组。由于此方程组为线性方程组,可在数学软件 Mathematica 中运行代码求解。

此外,根据 LI 和 LU^[7] 文章中的色散关系,可以得到如下无量纲化的线性色散关系

$$\omega^2 = \frac{D+1}{M + \coth(H)}, \tag{20}$$

在本研究中,考虑到线性波频 ω 和实际波频之间的差别,假设

$$\Omega/\omega = \epsilon. \tag{21}$$

其中无量纲项 ϵ 是大于 1 的常数。水弹性波的非线性随着 ϵ 的增大而增强。

基于已有的线性结果,可以得到合适的解表达与初始猜测解

$$\zeta_m(X) = \sum_{m=1}^{+\infty} [\beta_m \cos(mX) + \gamma_m \sin(mX)], \tag{22}$$

$$\phi_m(X, z) = \sum_{m=1}^{+\infty} [\alpha_m e^{mz} \sin(mX) + \epsilon_m e^{mz} \cos(mX) + \theta_m z], \tag{23}$$

$$\phi_0(X, z) = \alpha_0 e^z \sin X, \tag{24}$$

$$\zeta_0(X) = 0. \tag{25}$$

其中 $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \epsilon_m$ 和 θ_m 是待求系数并且 $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_\infty = 0$, 值得注意的是式(20)自动满足式(2)。

同时,为使数学模型封闭,建立如下方程

$$\zeta_1(m\pi) - \zeta_1(n\pi) = H, \tag{26}$$

其中 m 是偶数, n 是奇数, H 是入射波的波幅。用总平方残差验证 HAM 的准确性

$$\epsilon_m^T = \frac{1}{1+M} \sum_{i=0}^M [(N_1[\Phi, \eta] |_{X=i\Delta X, z=\eta})^2 + (N_2[\Phi, \eta] |_{X=i\Delta X, z=\eta})^2]. \tag{27}$$

其中 M 是整数, $\Delta X = \pi/M$ 。在下文中,选择 $M=10$ 。

3 近似解的迭代解

通过高阶形变方程,可以计算出近似解,前三阶近似解的迭代如下。更高阶的迭代解由于数据的复杂性在此省略。

$$\phi_1(X, z) = \frac{H\epsilon}{2\Omega} e^z \sin X, \tag{28}$$

$$\zeta_1(X) = \frac{H}{2} \cos X + \frac{H^2 \epsilon^2}{8\Omega^2 c_0}, \tag{29}$$

$$\phi_2(X, z) = -\frac{H\epsilon}{4\Omega} \left(-2 + c_0 \left(2 - 2 \frac{\Omega^2}{\epsilon^2} + \frac{H^2 \epsilon^2}{4\Omega^2 c_0} \right) \right) e^z \sin X, \tag{30}$$

$$\zeta_2(X) = \frac{H\Omega}{2\epsilon} D c_0 \tau_\varphi \sin X - \frac{1}{2} (-1 + c_0) \frac{H^2 \epsilon^2}{4\Omega^2 c_0} +$$

$$\frac{H}{2}(1+Dc_0-\frac{\Omega^2}{\epsilon^2}M)\cos X, \quad (31)$$

$$\varphi_3(X, z) = T_1 e^z \sin X - \frac{1}{8} T_2 e^{2z} \sin 2X + T_3 e^z \cos X + T_4 e^{2z} \cos 2X - T_5, \quad (32)$$

$$\zeta_3(X) = T_6 \sin X + \frac{H(T_7 + c_0^2 T_8)}{32\epsilon^4 c_0^2} \cos X - \frac{c_0 H}{52} \cos 2X - \frac{H\epsilon^2}{2 \cdot 336} \cos 3X + T_9, \quad (33)$$

$$\alpha_{0,0} = -\frac{H\epsilon}{2\Omega c_0}, \quad (34)$$

其中

$$T_1 = \frac{H(Q_1 + c_0 Q_2)}{128\epsilon^2 \Omega c_0^4}, \quad (35)$$

$$T_2 = \frac{H[8\epsilon^2 \Omega c_0^2 + c_0 H\epsilon^4 + 8\Omega c_0^3(-\epsilon^2 + D\epsilon^2 - \Omega^2 - \Omega^2 m_e)]}{16\epsilon c_0^2}, \quad (36)$$

$$T_3 = -\frac{D\Omega^2 c_0^2 \tau_\varphi H}{2\epsilon^2}, T_4 = -\frac{DH^2 \tau_\varphi c_0}{16},$$

$$T_5 = -\frac{DH^2 \tau_\varphi c_0}{8} z, \quad (37)$$

$$T_6 = \frac{DH\Omega c_0[2\epsilon^2 + c_0 \tau_\varphi \epsilon^2(1+2D) - 2c_0 \tau_\varphi \Omega^2 m_e]}{2\epsilon^2}, \quad (38)$$

$$T_7 = 16\epsilon^4 \Omega c_0^2 + 32\epsilon^2 \Omega c_0^3 (D\epsilon^2 - \Omega^2 m_e), \quad (39)$$

$$T_8 = -3H\epsilon^6 + 16[-(1+2D)\epsilon^2 \Omega^2 m_e + \Omega^4 m_e^2 + Q_3], \quad (40)$$

$$T_9 = -\frac{Hc_0 \epsilon^2[-1+2c_0+c_0^2(-2+2\Omega^2/c_0^2)]}{8\Omega c_0^2}, \quad (41)$$

$$Q_1 = 64\epsilon^4 \Omega c_0^4 - 8c_0^3 \epsilon^2 \Omega [H\epsilon^4 + 16\epsilon^2 \Omega c_0^2 (\epsilon^2 - \Omega^2)], \quad (42)$$

$$Q_2 = H\epsilon^8 + 8H\epsilon^4 \Omega c_0^2 (\epsilon^2 - \Omega^2) + 64\Omega c_0^6 [\epsilon^4 + \epsilon^2 \Omega^2 (-1+D) - \Omega^4 m_e], \quad (43)$$

$$Q_3 = \epsilon^2 \Omega c_0^2 [(1+D+D^2)\epsilon^2 - \Omega^2 (1+D^2 \tau_\varphi^2)]. \quad (44)$$

4 结果分析

在无量纲化的数值计算中,使用 $k = \pi/25$, $d = 0.2k \approx 0.025$, $H = 0.2k \approx 0.025$, $\rho_e = 917/1024$, $\nu = 0.3$, $E = 31305.7$ (即有量纲情况下 $E = 5 \times 10^9$ Pa), $\epsilon = 1.0002^{[7]}$, 以上数据在不加特殊说明时保持不变。

根据这些数值,计算了不同阶的总平方残差并在下图展示其与 c_0 之间的关系。如图 2 所示,总对

数平方残差 $\log_{10} \epsilon_m^T$ 在 $c_0 = -0.36$ 左右取得最小值 -5.51 , 该结果证明了对于黏弹性板的非线性水弹性响应, 计算结果是正确且收敛的。根据图 3, 可知黏弹性板形变 $\zeta(X)$ 的图像随着 τ_φ 的增大波峰处变平, 波谷处变陡。在图 4 中, 频率 Ω 随着波幅 H 的增加而增加, 这说明 VLFS 的水弹性响应的非线性随着波幅 H 的增大而增强。在图 5(a) 中, 板挠度 $\zeta(X)$ 随着波幅 H 的增大明显增大; 图 5(b) 展示了板挠度在不同杨氏模量下的变化, 可以发现板挠度随着板的杨氏模量增加而减小; 从图 5(c) 可以发现, 板挠度 $\zeta(X)$ 随着板厚度 d 的增加而减少; 根据图 5(d), 可知板挠度 $\zeta(X)$ 随着无量纲系数 ϵ 的增加而增加, 这说明如果使用线性的色散关系, 可能会低估非线性波波幅的变化。

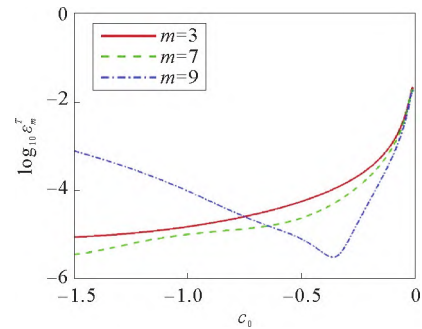


图 2 平方残差 ϵ_m^T 随 c_0 变化图

Fig.2 Variation of square residuals ϵ_m^T versus c_0

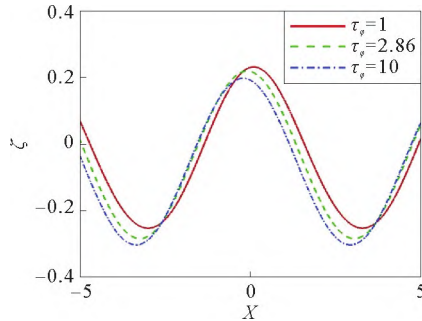


图 3 在不同 τ_φ 下板挠度 $\zeta(X)$ 随 X 的变化图

Fig.3 Variation of $\zeta(X)$ versus X for different τ_φ

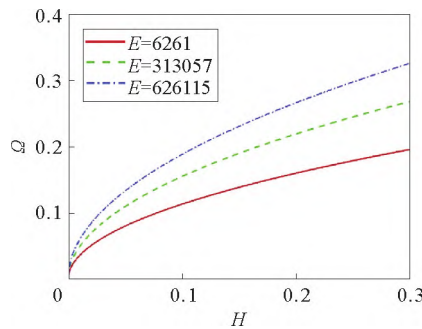


图 4 非线性波频 Ω 随波幅 H 的变化图

Fig.4 Variation of nonlinear wave frequency Ω versus different values of H

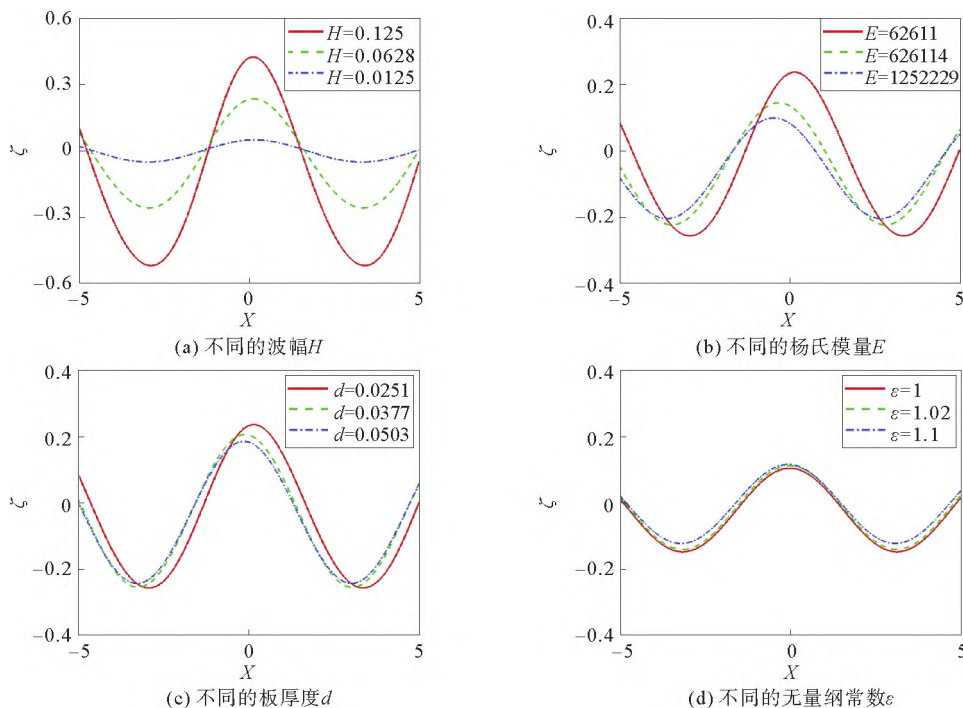


图 5 在不同赋值下板挠度 $\zeta(X)$ 随 X 变化图

Fig.5 Variation of $\zeta(X)$ versus X for different values

5 结 语

本工作将超大型浮式结构物(VLFS)模拟为黏弹性薄板,运用同伦分析方法(HAM)解析地研究了VLFS的非线性水弹性响应问题。首先运用行波法将这个问题转化成一个定常问题。根据计算结果,分析了几个重要物理参数对漂浮黏弹性板的水弹性响应的影响。结果表明黏弹性板的挠度随着黏弹性松弛时间的增大而减小。同时,黏弹性板的挠度随着板的杨氏模量和厚度增大也会减小。但黏弹性板的挠度会随着入射波波幅的增大而增大。此外,近似的非线性色散关系表明,如果使用了线性的色散关系,可能会大大低估漂浮在海洋上的VLFS的弹性形变。

参 考 文 献

[1] LIAO S J, SHERIF S A. Beyond perturbation; Introduction to the homotopy analysis method[J]. Applied Mechanics Reviews, 2004, 57(5): B25-B26.
 [2] LIAO S J. Notes on the homotopy analysis method; Some definitions and theorems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14(4): 983-997.
 [3] LIAO S J. Homotopy analysis method in nonlinear differential equations[M]. Beijing: Higher Education Press, 2012.

[4] WANG P, LU D Q. Analytic approximation to nonlinear hydroelastic waves traveling in a thin elastic plate floating on a fluid [J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2013, 56(11): 2170-2177.
 [5] WANG P, LU D Q. Nonlinear hydroelastic waves traveling in a thin elastic plate floating on a two-layer fluid[J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 274(C): 700-710.
 [6] SQUIRE V, HOSKING R J, KERR A D, et al. Review of moving Loads on Ice Plates[J]. Journal of Cold Regions Engineering, 1996: 168-169.
 [7] LI J S, LU D Q. Flexural-gravity wave resistances due to a moving point source on 2-D infinite floating beam[J]. Journal of Hydrodynamics, 2017, 29(6): 1000-1009.
 [8] POGORELOVA A V. Plane problem of the impact of several shock pulses on a viscoelastic plate floating on a fluid surface[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2010, 51(2): 155-163.
 [9] XUE Y Z, ZENG L D, NI B Y, et al. Hydroelastic response of an ice sheet with a lead to a moving load[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(3): 037109.
 [10] KOZIN V M, POGORELOVA A V. Wave resistance of amphibian air cushion vehicles during motion on ice fields[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2003, 44(2): 193-197.
 [11] SCI G. Nonlinear hydroelastic waves traveling in a plate in terms of plotnikov-to land's model[J]. Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 13(3): 724-734.

(责任编辑 姜丰辉)